



*Вступний курс  
Квантової  
Теорії  
Поля*

Майкл Е. Пескін ♦ Деніел В. Шродер

*Вступний курс*  
*Квантової*  
*Теорії*  
*Поля*

---

Майкл Е. Пескін  
Стенфордський Центр  
Лінійного Прискорювача

Деніел В. Шродер  
Університет Вебера

---

Том I

Фейнманові діаграми  
і квантова електродинаміка

Перекладено за виданням:  
Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V.,  
*An Introduction to Quantum Field Theory*,  
Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1995.

Переклав:  
*О. Авраменко.*

*An Introduction to*  
**Quantum**  
*Field*  
**Theory**

---

*Michael E. Peskin*  
Stanford Linear Accelerator Center

*Daniel V. Schroeder*  
Weber State University

# Зміст

<b>Позначення і домовленості .....</b>	<b>5</b>
<b>Розділ 1. Попередній розгляд: утворення пар при анігіляції <math>e^+e^-</math> ..</b>	<b>9</b>
§ 1.1. Найпростіша ситуація . . . . .	10
§ 1.2. Доповнення й запитання . . . . .	15
<b>Розділ 2. Поле Кляйна–Гордона .....</b>	<b>20</b>
§ 2.1. Необхідність польового розгляду . . . . .	20
§ 2.2. Елементи класичної теорії поля . . . . .	22
§ 2.3. Поле Кляйна–Гордона як система гармонійних осциляторів	27
§ 2.4. Поле Кляйна–Гордона у просторі-часі . . . . .	34
Задачі . . . . .	43
<b>Розділ 3. Діракове поле .....</b>	<b>46</b>
§ 3.1. Лоренц-інваріантність хвильових рівнянь . . . . .	46
§ 3.2. Рішення рівняння Дірака для вільних часток . . . . .	56
§ 3.3. Матриці Дірака та білінійні форми діракового поля . . . . .	61
§ 3.4. Квантування діракового поля . . . . .	65
§ 3.5. Дискретні симетрії в теорії Дірака . . . . .	78
Задачі . . . . .	87
<b>Розділ 4. Поля із взаємодією і фейнманові діаграми .....</b>	<b>94</b>
§ 4.1. Теорія збурень — філософія і приклади . . . . .	94
§ 4.2. Пертурбативний ряд для кореляційних функцій . . . . .	100
§ 4.3. Теорема Віка . . . . .	106
§ 4.4. Фейнманові діаграми . . . . .	109
§ 4.5. Переріз розсіяння і S-матриця . . . . .	118
§ 4.6. Обчислення елементів S-матриці з фейнманових діаграм . .	128
§ 4.7. Фейнманові правила для ферміонів . . . . .	135
§ 4.8. Фейнманові правила для квантової електродинаміки . . . .	143
Задачі . . . . .	147

<b>Розділ 5. Елементарні процеси квантової електродинаміки</b>	<b>152</b>
§ 5.1. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : вступ	152
§ 5.2. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : спіральна структура	164
§ 5.3. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : нерелятивістська межа	169
§ 5.4. Кросинг-симетрія	177
§ 5.5. Комптонове розсіяння	182
Задачі	196
<b>Розділ 6. Радіаційні поправки: вступ</b>	<b>203</b>
§ 6.1. М'яке гальмівне випромінювання	204
§ 6.2. Електронна вершинна функція: формальна структура	213
§ 6.3. Електронна вершинна функція: обчислення	218
§ 6.4. Електронна вершинна функція: інфрачервона розбіжність	229
§ 6.5. Підрахунок та інтерпретація інфрачервоних розбіжностей	233
Задачі	240
<b>Розділ 7. Радіаційні поправки: формальний розгляд</b>	<b>244</b>
§ 7.1. Перенормування напруженості поля	244
§ 7.2. Редукційна формула ЛСЦ	256
§ 7.3. Оптична теорема	265
§ 7.4. Тотожність Варда–Такахаші	273
§ 7.5. Перенормування електричного заряду	280
Задачі	294
<b>Прикінцевий проект: випромінювання глюонних струменів</b>	<b>296</b>
<b>Додаток. Фізичні константи і перевідні множники</b>	<b>301</b>
<b>Бібліографія</b>	<b>303</b>

# Позначення і домовленості

## Одиниці виміру

Ми працюватимемо в природних одиницях, у яких  $\hbar = c = 1$ . В цій системі

$$[\text{довжина}] = [\text{час}] = [\text{енергія}]^{-1} = [\text{маса}]^{-1}.$$

Тому маса ( $m$ ) частки дорівнює її енергії спокою ( $mc^2$ ), а також її зворотній комптоновій довжині ( $mc/\hbar$ ). Наприклад,

$$m_{\text{електрон}} = 9.109 \times 10^{-28} \text{ г} = 0.511 \text{ MeV} = (3.862 \times 10^{-11} \text{ см})^{-1}.$$

Вибір інших корисних чисел і перевідних множників наведено в Додатку.

## Релятивізм і тензори

Наші домовленості з релятивізму відповідають Джексону [32], Бйоркену і Дреллу [9, 10], а також майже всім останнім роботам з теорії поля. Ми використовуємо метричний тензор

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

де грецькі індекси пробігають значення 0, 1, 2, 3 або  $t, x, y, z$ . Латинські індекси —  $i, j$  і т. д. — позначають лише три просторові компоненти. В усіх випадках береться сума за двічі повтореними індексами. 4-вектори, як і звичайні числа, позначаються світлим курсивом; 3-вектори позначаються напівжирним шрифтом. Наприклад,

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}); \\ p \cdot x = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Для часток з масою маємо

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2.$$

Зазначимо, що вектор координати  $x^\mu$  є „природно піднятим“, тоді як оператор похідної

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

„природно опущений“.

Ми визначаємо абсолютно антисиметричний тензор  $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  таким чином, щоб

$$\varepsilon^{0123} = +1.$$

При цьому ви мусите бути уважними, оскільки з такого визначення випливає, що  $\varepsilon_{0123} = -1$  і  $\varepsilon^{1230} = -1$ . (Це узгоджено з позначеннями Джексона, але не Бйоркена і Дрелла.)

## Квантова механіка

Ми працюватимемо з одночастковими хвильовими функціями Шродінгера для квантовомеханічних часток. Представимо оператори енергії та імпульсу для цих хвильових функцій у такому вигляді:

$$E = i \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \mathbf{p} = -i \nabla.$$

Ці рівняння можна об'єднати наступним чином:

$$p^\mu = i \partial^\mu;$$

у  $\partial^\mu$  індекс піднятий для зручності, щоб усунути знак мінус. Плоска хвиля  $e^{-ik \cdot x}$  відповідає імпульсові  $k^\mu$ , оскільки

$$i \partial^\mu (e^{-ik \cdot x}) = k^\mu e^{-ik \cdot x}.$$

Скорочення „е. с.“ позначає ермітове спряження. При розгляді спіну в квантовій механіці використовують сигма-матриці Паулі:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Добуток цих матриць задовольняє тотожності

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k.$$

Зручно визначити лінійну комбінацію  $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i \sigma^2)$ ; в такому разі

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Фур'є-перетворення й узагальнені функції

Ми часто вживатимемо ступінчасту функцію Гевісайда  $\theta(x)$  і дельта-функцію Дірака  $\delta(x)$ , які визначені наступним чином:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x).$$

$n$ -вимірна дельта-функція, позначена як  $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ , дорівнює нулю всюди, за винятком  $\mathbf{x} = 0$ , і задовольняє рівнянню

$$\int d^n \mathbf{x} \delta^{(n)}(\mathbf{x}) = 1.$$

У перетворенні Фур'є множник  $2\pi$  завжди з'являтиметься в інтегралах по імпульсу. Наприклад, для чотирьох вимірів:

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k);$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^4 x e^{ik \cdot x} f(x).$$

(У тривимірному перетворенні знак в експоненті буде відповідно  $+$  і  $-$ .) Тільки в  $\tilde{f}(k)$  не вживатиметься в тих випадках, коли це не викликати запитань. Інший важливий множник  $2\pi$  виникає в тотожності

$$\int d^4 x e^{ik \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k).$$

## Електродинаміка

Ми використовуємо позначення Гевісайда–Лоренца, у яких множник  $4\pi$  включено до закону Кулона і в константу тонкої структури, а не в рівняння Максвелла. Тому кулонів потенціал точкового заряду  $Q$  має вигляд

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r},$$

і константа тонкої структури дорівнює

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Символ  $e$  залишається за зарядом електрона і є від'ємною величиною (хоча знак інколи використовується). Зазвичай ми працюємо з релятивістською формою рівнянь Максвелла:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu,$$



де

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}).$$

і ми вилучили  $e$  з 4-вектора питомого струму  $j^\mu$ .

### Рівняння Дірака

Деякі наші позначення відрізняються від тих, що прийняті у Бйоркена і Дрелла та в іншій літературі. Ми використовуємо кіральний базис для матриць Дірака і релятивістське нормування для діракових спінорів. Ці позначення запроваджуються в §§ 3.2 і 3.3.

## Розділ 1

### Попередній розгляд: утворення пар при анігіляції $e^+e^-$

Головною метою першого тому нашого курсу є розробка основного обчислювального методу квантової теорії поля — формалізму фейнманових діаграм. Потім ми застосуємо цей формалізм для обчислень у квантовій електродинаміці, яка є квантовою теорією електронів та фотонів.

Квантова електродинаміка (КЕД), мабуть, найкраща з наявних фундаментальних теорій. Вона сформульована як набір простих рівнянь (Максвела й Дірака), вигляд яких істотним чином визначається релятивістською інваріантністю. Квантовомеханічні рішення цих рівнянь дають детальні передбачення електромагнітних явищ у масштабах від макроскопічних відстаней аж до ділянок простору в кількасот разів менших від розміру протона.

Фейнманові діаграми забезпечують для цієї вишуканої теорії відповідну за вишуканістю обчислювальну процедуру. Вона полягає в тому, щоб уявити процес, який може відбуватися з електронами та фотонами, зобразити відповідну йому діаграму, а потім з її допомогою виписати в математичній формі квантовомеханічну амплітуду цього процесу.

В першому томі ми виводимо квантову електродинаміку і метод фейнманових діаграм з основних засад квантової механіки й теорії відносності. Зрештою ми досягнемо того рівня, коли зможемо обчислити значення спостережних величин, що становлять значний інтерес при вивченні елементарних часток.<sup>1</sup> Та на жаль, щоб дістатися нашої мети й розробити простий обчислювальний метод, ми спершу мусимо пройти довгий шлях оволодіння формалізмом теорії. Три наступні за цим розділи майже цілком присвячені формальним питанням, і при їх вивченні перед читачем може постати питання: а до чого ми, власне, прямуємо? Ми хотіли б бодай частково відповісти заздалегідь на це питання, обговоривши в поточному розділі фізику одного елементарного процесу в КЕД — такого простого, що більшість його властивостей впливають безпосередньо з фізичної інтуїції. Певна річ,

---

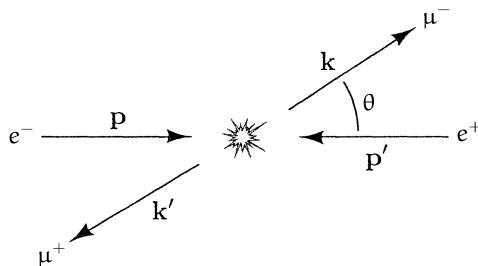
<sup>1</sup> Від перекладача. Також у цьому контексті нерідко вживається термін „частинка“, що не зовсім коректно, оскільки це слово є вже наступною після слова „частка“ зменшувальною формою від „частина“ і йому властиве виразне емоційне забарвлення.

такий інтуїтивний, приземлений підхід має багато вад. В Розділі 5 ми повернемося до цього процесу, застосувавши всю силу методу фейнманових діаграм. При послідовному розгляді питання ми побачимо, як крок за кроком зникають усі наші попередні труднощі.

## § 1.1. Найпростіша ситуація

Оскільки більшість експериментів у фізиці часток включають розсіяння, найчастіше у квантовій теорії поля обчислюють саме переріз розсіяння. Ми хочемо отримати переріз найпростішого з усіх процесів КЕД — анігіляції електрона зі своєю античасткою, позитроном, і утворення пари більш важких лептонів (таких, як мюони). Існування античастинок є, власне, одним із передбачень квантової теорії поля, і ми обговоримо це в Розділах 2 і 3. Проте зараз вважатимемо їхнє існування як даність.

Дослід з вимірювання ймовірності такої анігіляції полягає в обстрілі пучка електронів пучком позитронів. Вимірюваною величиною є переріз реакції  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , як функція енергії центру мас і відносного кута  $\theta$  між вхідними електронами і вихідними мюонами. Процес зображено на Рис. 1.1. Для простоти працюватимемо в системі центру мас (ЦМ), у якій імпульси



**Рис. 1.1.** Реакція анігіляції  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , показана в системі центру мас.

часток задовольняють умовам  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$  і  $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ . Також припустимо, що енергія  $E$  набагато більша як за масу електрона, так і за масу мюона, тож  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = E = E_{\text{цм}}/2$ . (Ми вживаємо напівжирний шрифт для позначення 3-векторів і звичайний курсив — для 4-векторів.)

Позаяк і електрон, і позитрон мають спин  $1/2$ , ми мусимо задати їхню спінову орієнтацію. Найзручніше вибрати вісь, що визначає квантування спіну частки, за напрямом її руху; тоді спин кожної частки буде поляризований або паралельно, або антипаралельно до цієї осі. На практиці пучки електронів і позитронів часто неполяризовані, а мюонні детектори не реєструють поляризацію мюонів. Тому ми маємо усереднити переріз за спіновими орі-

єнтаціями електронів та позитронів і підсумувати його за спіновими орієнтаціями мюонів.

Для будь-якої заданої спінової орієнтації всіх часток прийнято записувати диференційний переріз процесу з утворенням  $\mu^+$  в елементі тілесного кута  $d\Omega$ , як

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{цм}}^2} |\mathcal{M}|^2. \quad (1.1)$$

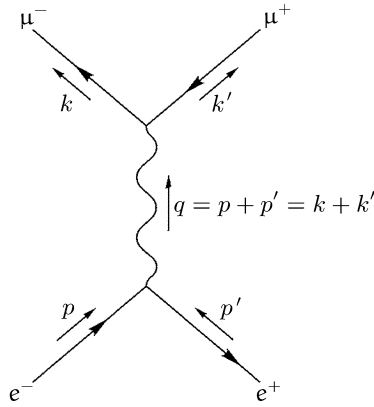
Множник  $E_{\text{цм}}^{-2}$  забезпечує правильну розмірність перерізу, оскільки в обрній системі одиниць (енергія) $^{-2} \sim$  (довжина) $^2$ . Отже, величина  $\mathcal{M}$  безрозмірна; вона є квантовомеханічною амплітудою нашого процесу (аналогічно до амплітуди  $f$  в нерелятивістській квантовій механіці), і зараз ми маємо зайнятися питанням, як обчислити цю амплітуду з фундаментальних засад теорії. Інші множники в рівнянні є винятково результатом домовленості. Формула (1.1) є, власне, окремим випадком (справедливим для розсіяння в ЦМ з двома безмасовими частками в кінцевому стані) від загальнішої формули, яку неможливо отримати лише на підставі розмірного аналізу і яку ми виведемо в § 4.5.

Тепер настає черга поганих і гарних новин.

Погана новина полягає в тому, що навіть для найпростішого з процесів з КЕД точний вираз для  $\mathcal{M}$  невідомий. Це не повинно нас дивувати, бо навіть у нерелятивістській квантовій механіці задача розсіяння рідко має точне розв'язання. Найкраще, що ми можемо зробити, це отримати формальний вираз для  $\mathcal{M}$  у вигляді пертурбативного ряду за константою електромагнітного зв'язку й обчислити кілька перших його членів.

А гарна новина — це те, що Фейнман розробив красивий спосіб упорядкувати й унаочнити пертурбативний ряд з використанням *фейнманових діаграм*. Грубо кажучи, діаграми зображають потоки електронів і фотонів у процесі розсіяння. У наших обчисленнях член найнижчого порядку в пертурбативному ряді можна представити єдиною діаграмою, зображеною на Рис. 1.2. Ця діаграма має три типи компонентів: зовнішні лінії (що представляють по дві входні й вихідні частки), внутрішні лінії (що представляють „віртуальні“ частки, в нашому випадку — один віртуальний фотон) і вершини. Прийнято зображати електрони суцільними прямими лініями, а фотони — хвилястими. Стрілки на суцільних лініях вказують напрям струму негативного заряду, а не імпульсу. Кожній зовнішній лінії ми приписуємо вектор 4-імпульсу, як і показано на діаграмі; а імпульс  $q$  внутрішньої лінії визначається законом збереження імпульсу в кожній з вершин:  $q = p + p' = k + k'$ . Також ми маємо поставити у відповідність кожному зовнішньому ферміону спіновий стан („вгору“ або „вниз“).

Згідно з *правилами Фейнмана*, кожную діаграму можна інтерпретувати як цілком певний внесок в амплітуду  $\mathcal{M}$ . Правила приписують усім елементам



**Рис. 1.2.** Фейнманова діаграма найнижчого порядку для перерізу розсіяння  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . У цьому порядку єдиним можливим проміжним станом є фотон ( $\gamma$ ).

діаграми короткі алгебраїчні множники, а їхній добуток дає значення відповідного члена пертурбативного ряду. Проте отримання додатного до використання виразу для амплітуди  $\mathcal{M}$  може виявитися вельми нетривіальним завданням. У наступних розділах ми розробимо корисну технологію проведення таких обчислень. А зараз, оскільки ми нею ще не володіємо, скористаємося для отримання відповіді в нашій конкретній задачі деякими евристичними міркуваннями замість справжніх правил Фейнмана.

Нагадаємо, що в квантовомеханічній теорії збурень член першого порядку в амплітуді переходу можна записати у вигляді:

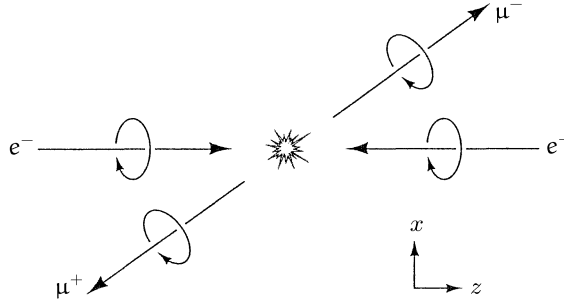
$$\langle \text{кінцевий стан} | H_I | \text{початковий стан} \rangle, \quad (1.2)$$

де  $H_I$  — частина гамільтоніана, що описує взаємодію. У нашому випадку, початковим є стан  $|e^+e^- \rangle$ , а кінцевим —  $\langle \mu^+\mu^- |$ . Проте наш гамільтоніан взаємодії пов'язує електрони з мюонами не безпосередньо, а лише через електромагнітне поле (тобто через фотони). Тому перший член (1.2) в пертурбативному ряді дає нульовий внесок, і ми мусимо перейти до члена другого порядку

$$\mathcal{M} \sim \langle \mu^+\mu^- | H_I | \gamma \rangle_\mu \langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu. \quad (1.3)$$

Це і є евристичний спосіб запису внеску до  $\mathcal{M}$  з діаграми на Рис. 1.2. Зовнішнім електронним лініям відповідає множник  $|e^+e^- \rangle$ , зовнішнім мюонним —  $\langle \mu^+\mu^- |$ . З вершинами зіставляються  $H_I$ , а з внутрішньою фотонною лінією — оператор  $|\gamma\rangle\langle\gamma|$ . Ми додали векторні індекси ( $\mu$ ), бо фотон є векторною часткою з чотирма компонентами. Тому є чотири можливі проміжні стани, по одному на кожен компонент, і відповідно до правил теорії

збурень ми мусимо взяти суму по всім проміжним станам. Зауважимо, що оскільки сума в (1.3) має вигляд скалярного добутку 4-векторів, то амплітуда  $\mathcal{M}$  є лоренц-інваріантним скаляром, якщо кожен множник у (1.3) є 4-вектором.



**Рис. 1.3.** Один з можливих наборів спінових орієнтацій. Електрон і негативний мюон — правополяризовані, тоді як позитрон і позитивний мюон — лівополяризовані.

Спробуймо вгадати форму вектора  $\langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle$ . Позаяк  $H_I$  пов'язує електрони з фотонами з константою  $e$  (заряд електрона), матричний елемент має бути пропорціональним до  $e$ . Зараз розглянемо конкретний набір початкових та кінцевих спінових орієнтацій, зображених на Рис. 1.3. Електрон і мюон мають спіни паралельні до напрямку їхнього руху; такі частки називають *правополяризованими*. Відповідно, античастки є *лівополяризованими*. Спіни електрона й позитрона складаються в одиницю моменту імпульсу в напрямку  $+z$ . Оскільки  $H_I$  зберігає момент імпульсу, то поляризація фотона, з яким пов'язані ці частки, має відповідати їх сумарному моменту-ві імпульсу:  $\epsilon^\mu = (0, 1, i, 0)$ . Отже, ми маємо

$$\langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle_\mu \propto e (0, 1, i, 0). \quad (1.4)$$

Таким же чином, мюонний матричний елемент повинен мати поляризацію, що відповідає одиниці моменту імпульсу вздовж напрямку руху негативно зарядженого мюона. Щоб отримати правильний вектор, повернемо (1.4) на кут  $\theta$  у площині  $(x, z)$ :

$$\langle \gamma | H_I | \mu^+ \mu^- \rangle^\mu \propto e (0, \cos \theta, i, -\sin \theta). \quad (1.5)$$

Для обчислення амплітуди  $\mathcal{M}$  комплексно спрягаємо цей вектор і скалярно помножуємо його на (1.4). Відтак для заданих спінових орієнтацій маємо

$$\mathcal{M}(RL \rightarrow RL) = -e^2(1 + \cos \theta). \quad (1.6)$$

Звичайно, цей метод не дозволяє нам встановити загальний множник, проте в (1.6) він, суто випадково, є правильним завдяки домовленостям, прийнятим у (1.1). Зазначимо, що при  $\theta = 180^\circ$  амплітуда стає нульовою, чого й варто було очікувати, бо стан з моментом імпульсу в напрямку  $+z$  не переходить у стан з моментом імпульсу у напрямку  $-z$ .

Наступним розглянемо випадок, коли електрон і позитрон правополяризовані. Тепер їх повний спіновий момент імпульсу дорівнює нулю, тому належить вдатися до більш тонких аргументів. Ми можемо сподіватися отримати подовжньо поляризований фотон з коефіцієнтом Клебша–Гордана  $1/\sqrt{2}$ , як це відбувається при додаванні тривимірних моментів імпульсу:  $|\uparrow\downarrow\rangle = (1/\sqrt{2})(|j=1, m=0\rangle + |j=0, t=0\rangle)$ . Але насправді ми додаємо моменти імпульсу в чотиривимірній групі Лоренца, тож мусимо враховувати не лише спін (властивості перетворення станів при обертаннях), а й перетворення станів при бустах. Як ми покажемо в Розділі 3, коефіцієнт Клебша–Гордана, що пов'язує 4-вектор зі станом  $|e_R^+e_R^-\rangle$  безмасових ферміонів, дорівнює нулю. (Зазначимо, що такий стан є суперпозицією скаляра й антисиметричного тензора.) Отже, амплітуда  $\mathcal{M}(RR \rightarrow RL)$  дорівнює нулю, як і одинадцять інших амплітуд, у яких початковий або кінцевий стан мають нульовий повний момент імпульсу.

Решту ненульових амплітуд можна знайти таким самим чином, як і першу. В результаті маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(RL \rightarrow LR) &= -e^2(1 - \cos \theta), \\ \mathcal{M}(LR \rightarrow RL) &= -e^2(1 - \cos \theta), \\ \mathcal{M}(RL \rightarrow LR) &= -e^2(1 + \cos \theta).\end{aligned}\tag{1.7}$$

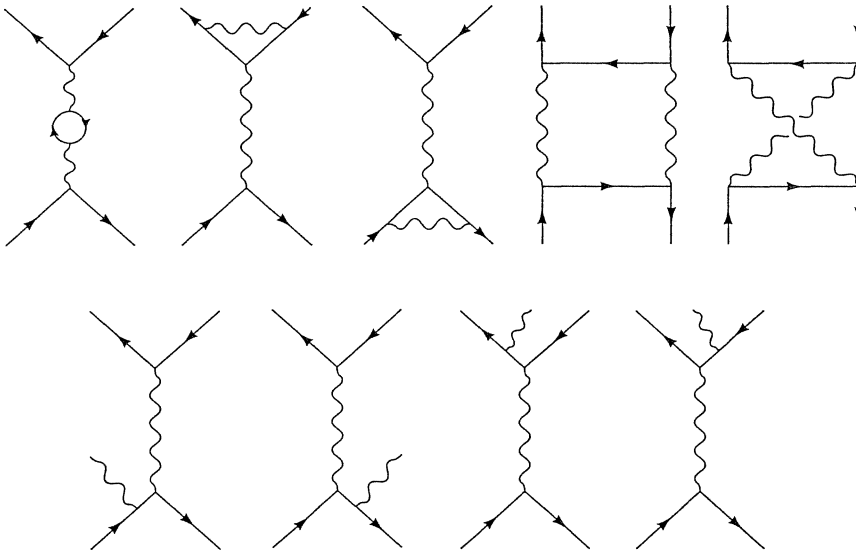
Підставляючи ці вирази в (1.1), усереднюючи за чотирма початковими і підсумовуючи за чотирма кінцевими спіновими орієнтаціями, знаходимо

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{цм}}} (1 + \cos^2 \theta),\tag{1.8}$$

де  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ . Інтегруючи по кутах  $\theta$  і  $\phi$ , отримуємо повний переріз

$$\sigma_{\text{повн}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2}.\tag{1.9}$$

Результати (1.8) і (1.9) узгоджуються з експериментами з точністю до 10%; а майже всі розходження виникають за рахунок наступного члена пертурбативного ряду, що відповідає діаграмам на Рис. 1.4. Якісні характеристики отриманих результатів — їх кутова залежність і різке зменшення перерізу з енергією — беззаперечно підтверджуються дослідними даними. (Докладніше ми обговоримо ці результати в § 5.1.)



**Рис. 1.4.** Фейнманові діаграми, що дають внесок  $\alpha^2$  в переріз розсіяння  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

## § 1.2. Доповнення й запитання

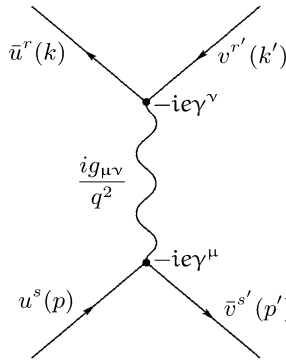
Ми отримали кутовий розподіл в реакції  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , виходячи з міркувань збереження моменту імпульсу, майже не звертаючись до засадничих принципів квантової електродинаміки. Проте ми вдалися до суттєвих спрощень, пов'язаних з наближенням високих енергій і вибором системи центру мас. При відмові від будь-якого з цих припущень наш розгляд втрачить свою чинність. То як же треба проводити обчислення в КЕД в загальному випадку? Для відповіді на це запитання ми маємо повернутися до правил Фейнмана.

Як було вказано вище, ці правила пропонують нам накреслити діаграму (або діаграми) процесу, який наразі розглядаємо, і кожному елементу поставити у відповідність певний алгебраїчний множник. На Рис. 1.5 показана діаграма нашої реакції  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  з відповідними позначеннями.

Для внутрішньої фотонної лінії ми пишемо  $-ig_{\mu\nu}/q^2$ , де  $g_{\mu\nu}$  — звичайний метричний тензор Мінковського, а  $q$  є 4-імпульсом віртуального фотона. Цей множник відповідає оператору  $|\gamma\rangle\langle\gamma|$  в нашій евристичній формулі (1.3).

Для кожної вершини записуємо  $-ie\gamma^\mu$ , що відповідає  $H_I$  в (1.3). Величини  $\gamma^\mu$  є набором постійних  $4 \times 4$ -матриць. Саме вони здійснюють „додавання моментів імпульсу“, пов'язуючи стани двох часток зі спіном  $1/2$  з векторною часткою.





**Рис. 1.5.** Діаграма з Рис. 1.2, де вказані алгебраїчні вирази, що відповідають вершинам, внутрішнім і зовнішнім лініям.

Зовнішні лінії представлені чотирикомпонентними стовпцями-спінорами  $u$ ,  $v$ , або рядками-спінорами  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ . Власне кажучи, вони є хвильовими функціями початкових та кінцевих часток в імпульсному просторі і відповідають  $|e^+e^- \rangle$  та  $\langle \mu^+\mu^-|$  в (1.3). Індекси  $s$ ,  $s'$ ,  $r$  і  $r'$  позначають спінові орієнтації — вгору або вниз.

Тепер можемо написати формулу для  $\mathcal{M}$ , зчитуючи всі елементи просто з діаграми:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{v}^{s'}(p'^\mu) u^s(p) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(k) (-ie\gamma^\nu) v^{r'}(k') = \\ &= \frac{ie^2}{q^2} \left( \bar{v}^{s'}(p') u^s(p) \right) \left( \bar{u}^r(k) v^{r'}(k') \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

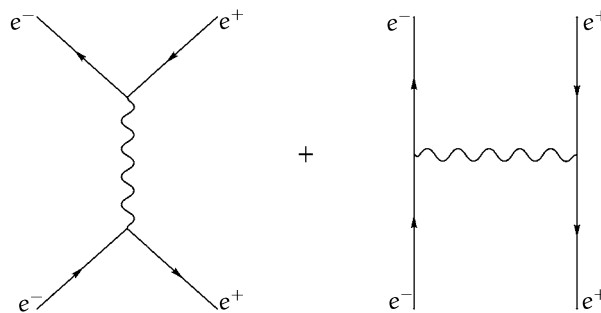
Досить повчально буде порівняти в деталях цей вираз із (1.3).

Щоб отримати переріз (1.8) з (1.10), ми могли б повернутися до наведених вище міркувань збереження моменту імпульсу, доповнених деякими конкретними відомостями про  $\gamma$ -матриці й діракові спінори. Такого штибу обчислення ми проведемо в § 5.2. Проте існує багато корисних прийомів, до яких можна вдаватися при маніпуляції з виразами на зразок (1.10), особливо при потребі обчислити лише *неполяризований* переріз. Використовуючи цю *фейнманову технологію слідів* (назва виникла від того, що доводиться знаходити сліди від добутку  $\gamma$ -матриць), зовсім не обов'язково знати явний вигляд цих матриць і діракових спінів. Обчислення стають майже бездумними, і результат (1.8) з'являється після суто алгебраїчних викладок загальним обсягом менш ніж на одну сторінку. Та оскільки правила Фейнмана і технологія слідів є таким потужними, то ми можемо відмовитись і від деяких спрощень. На завершення цього параграфу обговоримо кілька ситуацій за яких наші обчислення можуть значно ускладнитися.

Найпростіше обмеження, від якого можна відмовитись, це безмасовість мюона. Якщо енергія пучків не набагато більша за масу мюона, то всі наші передбачення залежатимуть від співвідношення  $m_\mu/E_{\text{цм}}$  (Оскільки електрон приблизно в 200 разів легший за мюон, його можна розглядати як безмасову частку за умови, що енергія пучка досить велика для утворення мюонів.) Застосувавши фейнманову технологію слідів, надзвичайно просто врахувати в наших обчисленнях масу мюона. Обсяг необхідних алгебраїчних викладок зросте відсотків на п'ятдесят, а співвідношення (1.1) між амплітудою та перерізом трохи зміниться, проте результат вартий додаткових зусиль. Ми проробимо ці обчислення в § 5.1.

Працювати в іншій системі відліку також не складно. Єдине, що зазнає модифікації, це зв'язок (1.1) між амплітудою й перерізом. А втім, можна просто здійснити перетворення Лоренца над формулою, отриманою в ЦМ.

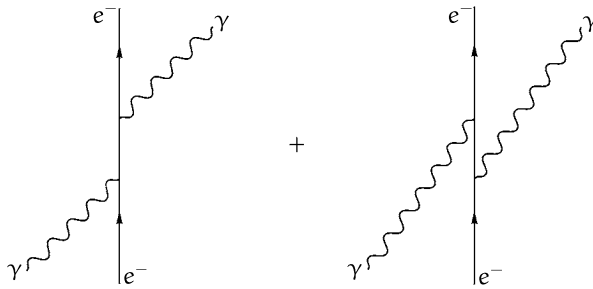
Коли відомі спінові стани початкових та/або кінцевих часток і ми хочемо врахувати масу мюона, то обчислення стають громіздкішими, хоча, в принципі, залишаються нескладними. Для такого випадку легко узагальнити технологію слідів, але часто буває простіше знайти числове вираження для (1.10) безпосередньо, використовуючи явний вигляд спінових  $u$  і  $v$ .



**Рис. 1.6.** Дві діаграми найнижчого порядку для розсіяння Баба  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ .

Далі можна обчислити переріз для різних процесів. Реакція  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , що називається *розсіянням Баба*, складніша, оскільки існує друга діаграма (див. Рис. 1.6). Спочатку треба додати амплітуди з обох діаграм, а потім піднести їхню суму до квадрату.

Інші процеси включають фотони в початковому та/або кінцевому станах. Зразковим прикладом є комптонове розсіяння; дві його діаграми найнижчого порядку зображені на Рис. 1.7. Правила Фейнмана для зовнішніх фотонних і внутрішніх електронних ліній не складніші від тих, які ми вже розглядали. Ми детально проаналізуємо комптонове розсіяння в § 5.5.



**Рис. 1.7.** Дві діаграми найнижчого порядку для комптонового розсіяння.

Нарешті, можемо врахувати члени вищих порядків пертурбативного ряду. Завдяки Фейнманові, принаймні не складно накреслити відповідні діаграми; на Рис. 1.4 зображені ті з них, що дають внесок у наступний член пертурбативного ряду для перерізу процесу  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Примітно, що алгоритм присвоєння алгебраїчних множників для окремих елементів діаграми зберігає чинність і для внесків вищих порядків, що дозволяє обчислити їх безпосередньо, хоча це дуже марудна справа. Обчислення повного внеску всіх дев'яти діаграм — серйозна робота на рівні наукової статті.

У нашому курсі, починаючи з Розділу 6, ми докладно аналізуватимемо ту фізику, що впливає з вищих порядків фейнманових діаграм, на зразок зображених на Рис. 1.4. Ми переконаємося, що останні чотири діаграми з додатковим фотоном у кінцевому стані теж необхідно врахувати, оскільки жоден детектор неспроможний виявити присутність фотонів з гранично низькими енергіями. А тому кінцевий стан з такими фотонами неможливо відрізнити від потрібного нам стану з однією лише парою мюонів.

Решта п'ять діаграм на Рис. 1.4 мають проміжні стани з кількома віртуальними частками замість одного фотона. У кожній з таких діаграм присутня принаймні одна віртуальна частка, імпульс якої не визначається законом збереження у вершинах. Оскільки теорія збурень вимагає взяти суму за всіма можливими проміжними станами, ми мусимо проінтегрувати по всіх можливих значеннях цього імпульсу. Проте на цьому етапі виникає нове ускладнення: у перших трьох діаграмах інтеграли по замкнутих петлях, якщо брати їх напроям, дають нескінченність. Наприкінці першого тому ми знайдемо спосіб отримання скінченних результатів. Але питання фізичного походження цих розбіжностей так просто не розв'язуються. Це буде головною темою другого тому.

Ми обговорювали фейнманові діаграми, як алгоритм проведення обчислень. Наступні розділи продемонструють усю силу цього інструменту. Однак, розглядаючи дедалі більше застосувань діаграм, ми побачимо, що вони починають жити своїм власним життям. Вони вкажуть на несподіва-

ні зв'язки між різними фізичними процесами і підкажуть інтуїтивні аргументи, які згодом можна буде перевірити при обчисленнях. Маємо надію, що ця книга допоможе вам оволодіти цим методом і знайти для нього нові корисні застосування.

## Розділ 2

# Поле Кляйна – Гордона

### § 2.1. Необхідність польового розгляду

Квантова теорія поля є застосуванням квантової механіки до динамічних систем *полів*, у тому ж розумінні, як власне квантова механіка розглядає квантування динамічних систем *часток*. Цей предмет конче необхідний для розуміння поточного стану фізики елементарних часток. З певними видозмінами квантовопольові методи відіграють істотну роль у найактивніших розділах атомної та ядерної фізики, а також фізики конденсованої матерії. Проте в першому томі нас передовсім цікавитимуть елементарні частки — і, відповідно, *релятивістські* поля.

Визначившись із тим, що ми прагнемо зрозуміти процеси, які відбуваються на дуже малих (квантовомеханічних) відстанях і при дуже великих (релятивістських) енергіях, може виникнути питання, навіщо ми маємо вивчати квантування *полів*. Чому ми не можемо просто проквантувати релятивістські частки, так само як квантуємо нерелятивістські?

Відповідь можна отримати кількома шляхами. Мабуть, найкраще було б написати одночасткове релятивістське хвильове рівняння (скажімо, Кляйна – Гордона або Дірака) і переконатися, що воно призводить до появи станів з негативною енергією і до інших суперечностей. Та оскільки це питання зазвичай розглядається наприкінці університетського курсу нерелятивістської квантової механіки, ми не будемо до нього повертатися. Проте й без того зрозуміло, чому не працює такий підхід. Ми не маємо права припускати, що який-небудь релятивістський процес можна пояснити в термінах одночасткового розгляду, бо співвідношення Ейнштейна  $E = mc^2$  дозволяє утворення пар частка-античастка. Навіть у тому разі, коли для утворення пари бракує енергії, багаточасткові стани виникають, наприклад, як проміжні в другому порядку теорії збурень. Ми можемо вважати, що ці стани реально існують протягом надзвичайно короткого часу, відповідно до принципу невизначеності  $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$ . При переході до вищих порядків теорії збурень можливе утворення довільної кількості таких „віртуальних“ часток.

Менш очевидним чином потреба в багаточастковій теорії впливає із

вимог причинності. Розгляньмо амплітуду розповсюдження вільної частки від  $\mathbf{x}_0$  до  $\mathbf{x}$ :

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle.$$

У нерелятивістській квантовій механіці маємо  $E = \mathbf{p}^2/2m$ , отже

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{x} | e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} \cdot e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} = \left( \frac{m}{2\pi i t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{im(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2/2t}. \end{aligned}$$

Цей вираз є ненульовий для всіх  $x$  і  $t$ , що вказує на можливість розповсюдження частки між будь-якими двома точками за довільно короткий проміжок часу. В релятивістській теорії це свідчило б про порушення причинності. Можна було б сподіватися, що використання релятивістського співвідношення  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  врятує ситуацію, проте це не так. За аналогією з нерелятивістським випадком, маємо

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \cdot e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

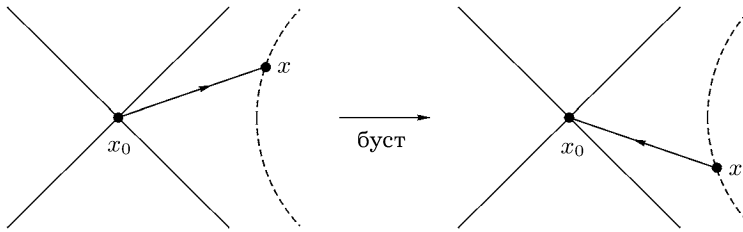
Цей інтеграл можна вирахувати явно через функції Бесселя.<sup>2</sup> Ми ж обмежимося лише розглядом його асимптотичної поведінки при  $x^2 \gg t^2$  (далеко за межами світлового конуса) за методом стаціонарної фази. Функція фази  $px - t\sqrt{p^2 + m^2}$  має стаціонарну точку при  $p = imx/\sqrt{x^2 - t^2}$ . Ми можемо вільно замкнути контур інтегрування у верхній півплощині таким чином, щоб він пройшов через цю точку. Підставляючи вказане значення для  $p$ , отримаємо, що з точністю до раціональної функції від  $x$  і  $t$ ,

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2 + t^2}}.$$

Отже, поза світловим конусом амплітуда розповсюдження хоч і мала, проте ненульова, і причинність все одно порушується.

Квантова теорія поля розв'язує проблему причинності дивовижним шляхом, який ми обговоримо в § 2.4. Там побачимо, що в багаточастковій теорії поля розповсюдження часток на простороподібні інтервали не відрізняється від розповсюдження *античастки* у протилежному напрямку

<sup>2</sup> Див. Градштейн і Рижик [27].



**Рис. 2.1.** Розповсюдження від  $x_0$  до  $x$  в одній системі відліку має вигляд як розповсюдження від  $x$  до  $x_0$  в іншій системі відліку.

(Рис. 2.1). Коли ми задаємось питанням, чи може спостереження в  $x_0$  вплинути на спостереження в  $x$ , то виявляємо, що амплітуди розповсюдження для частки й античастки точно скорочуються, тож причинність не порушується.

Квантова теорія поля природним чином описує не лише багаточасткові стани, а й переходи між станами з різною кількістю часток. Вона розв'язує проблему причинності шляхом впровадження античасток, а потім дозволяє пояснити зв'язок між спіном і статистикою. Та найважливіше, що вона забезпечує необхідні інструменти для обчислення перерізів розсіяння, тривалості життя часток та інших спостережних величин. Експериментальне підтвердження цих розрахунків, що часто виявляються безпрецедентно точними, і є головною підставою для вивчення квантової теорії поля.

## § 2.2. Елементи класичної теорії поля

У цьому параграфі ми робимо короткий огляд формалізму класичної теорії поля, необхідного для подальшого вивчення квантових полів.

### Лагранжова теорія поля

Фундаментальною величиною класичної механіки є дія,  $S$ , інтеграл по часу від лагранжіана  $L$ . В локальній теорії поля лагранжіан можна записати як просторовий інтеграл питомого лагранжіана,  $\mathcal{L}$ , що є функцією одного або кількох полів  $\phi(x)$  та їхніх похідних  $\partial_\mu \phi$ . Таким чином, маємо

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x. \quad (2.1)$$

Оскільки це книга з теорії поля, далі ми називатимемо  $\mathcal{L}$  просто лагранжіаном.

Принцип найменшої дії стверджує, що коли система еволюціонує від однієї заданої конфігурації до іншої за проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$ , то її „шлях“ у конфігураційному просторі такий, що дія  $S$  має екстремум (зазвичай мінімум). Можемо записати цю умову як

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Останній доданок можна перетворити на поверхневий інтеграл по границі чотиривимірної просторово-часової зони інтегрування. Позаяк початкова та кінцева польові конфігурації вважаються заданими, то  $\delta \phi$  є нульовим у початковий і кінцевий моменти часу. Якщо ж ми обмежимося розглядом деформацій  $\delta \phi$ , що зникають на просторовій границі зони, то поверхневий інтеграл дорівнює нулю. Виносячи множник  $\delta \phi$  з перших двох доданків і враховуючи, що інтеграл має дорівнювати нулю для будь-якого  $\delta \phi$ , ми доходимо висновку, що множник при  $\delta \phi$  є нульовим в усіх точках. Звідси отримуємо рівняння руху Ейлера–Лагранжа для поля:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.3)$$

Якщо лагранжіан включає більш ніж одне поле, то маємо по одному такому рівнянню для кожного з них.

## Гамільтонова теорія поля

Лагранжове формулювання теорії поля якнайкраще відповідає релятивістській динаміці, бо всі вирази в ньому явно лоренц-інваріантні. Проте в першому томі ми користуватимемося гамільтоновим формулюванням, оскільки воно дозволяє легко здійснити перехід до квантової механіки. Нагадаємо, що для дискретних систем кожній динамічній змінній величині  $q$  можна поставити у відповідність канонічно спряжений імпульс  $p \equiv \partial L / \partial \dot{q}$  (де  $\dot{q} = dq/dt$ ). Тоді гамільтоніан має вигляд  $H \equiv \sum (p\dot{q} - L)$ . Узагальнення на безперервну систему найлегше зрозуміти, уявивши, що точки простору  $x$



розміщені дискретно. Ми можемо визначити

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \int \mathcal{L}(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y})) d^3\mathbf{y} \sim \\ &\sim \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \sum_{\mathbf{y}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y})) d^3\mathbf{y} = \\ &= \pi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{y}, \end{aligned}$$

де

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \quad (2.4)$$

називається *питомим імпульсом*, спряженим до  $\phi(\mathbf{x})$ . Тоді гамільтоніан можна записати як

$$H = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - L.$$

Переходячи до континууму, маємо:

$$H = \int d^3\mathbf{x} (p(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}) \equiv \int \mathcal{H} d^3\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Наприкінці цього параграфу ми знову виведемо такий самий вираз для питомого гамільтоніана  $\mathcal{H}$ , застосувавши інший метод.

Для простого прикладу розглянемо теорію одного поля  $\phi(x)$  з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.6)$$

Поки вважатимемо  $\phi$  дійсним полем. У § 2.3 величина  $m$  буде інтерпретована як маса, але поки розглядатимемо її просто як параметр. Застосувавши звичайну процедуру до цього лагранжіана, маємо рівняння руху

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0 \quad \text{або} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0, \quad (2.7)$$

відоме як рівняння Кляйна–Гордона. (У цьому контексті воно є *класичним* рівнянням поля, на зразок рівнянь Максвелла, а не квантовомеханічним хвильовим рівнянням.) Зазначимо, що питомий канонічний імпульс, спряжений до  $\phi(x)$ , є  $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ . Також ми можемо побудувати гамільтоніан:

$$H = \int \mathcal{H} d^3\mathbf{x} = \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (2.8)$$

Три доданки в правій частині можна розглядати, відповідно, як енергію „переміщення“ в часі, енергію „зсуву“ в просторі та енергію, пов’язану з присутністю самого поля. Докладніше ми досліджуватимемо цей гамільтоніан у §§ 2.3 і 2.4.

### Теорема Нотер

А зараз обговоримо зв'язок між симетріями й законами збереження в класичній теорії поля, відображений у *теоремі Нотер*. Ця теорема розглядає безперервні перетворення полів  $\phi$ , які в інфінітезимальній формі мають вигляд

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \zeta(x), \\ \Delta\phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) = \alpha \zeta(x),\end{aligned}\tag{2.9}$$

де  $\alpha$  — інфінітезимальний параметр і  $\zeta(x)$  — деяка деформація конфігурації поля. Ми називаємо таке перетворення симетрією, якщо воно залишає інваріантними рівняння руху. Ця умова виконується автоматично, якщо дія інваріантна відносно (2.9). У загальнішому випадку ми можемо допустити зміну величини дії на доданок у вигляді поверхневого інтеграла, оскільки присутність такого члена не впливає на виведення рівнянь Ейлера–Лагранжа (2.3). Тому лагранжіан має бути інваріантним відносно (2.9) з точністю до 4-дивергенції:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &\rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu J^\mu(x), \\ \Delta\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \alpha \partial_\mu J^\mu(x),\end{aligned}\tag{2.10}$$

для деякого  $J^\mu$ . Тепер порівняємо вираз для  $\Delta\mathcal{L}$  з результатом, отриманим від варіації полів:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Delta\phi + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \partial_\mu(\Delta\phi) = \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi \right) + \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \Delta\phi.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Другий доданок є нульовим відповідно до рівняння Ейлера–Лагранжа (2.3). Підставляючи з (2.9) і (2.10) вирази для  $\Delta\phi$  і  $\Delta\mathcal{L}$ , знаходимо:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{для} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \zeta(x) - J^\mu(x).\tag{2.12}$$

(Якщо симетрія включає більше одного поля, то перший доданок у виразі для  $j^\mu(x)$  слід замінити на суму таких доданків — по одному для кожного поля.) Цей результат означає, що струм  $j^\mu(x)$  зберігається. Для кожної безперервної симетрії  $\mathcal{L}$  маємо відповідний закон збереження.

Закон збереження також може бути сформульовано як твердження, що заряд

$$Q \equiv \int_{\text{весь простір}} j^0 d^3\mathbf{x}\tag{2.13}$$

залишається незмінним у часі. Проте зауважимо, що формулювання теорії поля в термінах питомого лагранжіана безпосередньо призводить до локальної форми закону збереження (2.12).

Найпростіший приклад такого закону збереження впливає з лагранжіана, що має лише кінетичний член:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$ . Перетворення  $\phi \rightarrow \phi + \alpha$ , де  $\alpha$  є константою, залишає  $\mathcal{L}$  незмінним, з чого ми робимо висновок, що струм  $j^\mu = \partial^\mu \phi$  зберігається. Як менш тривіальний випадок, розглянемо лагранжіан

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2, \quad (2.14)$$

де  $\phi$  тепер *комплексне* поле. Ми можемо з легкістю показати, що рівнянням руху для цього лагранжіана знов-таки є рівняння Кляйна–Гордона (2.7). Цей лагранжіан інваріантний відносно перетворення  $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$ ; для інфінітезимального перетворення отримуємо

$$\Delta \phi = \alpha \zeta = i\alpha \phi; \quad \Delta \phi^* = \alpha \zeta^* = -i\alpha \phi^* \quad (2.15)$$

(Ми розглядаємо  $\phi$  і  $\phi^*$  як незалежні поля. Альтернативно ми могли б працювати з дійсною та уявною складовими поля  $\phi$ .) Тепер неважко показати, що збережений нотерів струм має вигляд

$$j^\mu = i[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)]. \quad (2.16)$$

(Спільний множник обрано довільно.) Застосувавши рівняння Кляйна–Гордона, можемо безпосередньо перевірити, що дивергенція цього струму дорівнює нулю. Згодом ми додамо до лагранжіана член, який пов'язує  $\phi$  з електромагнітним полем. Тоді інтерпретуємо  $j^\mu$  як питомий електромагнітний струм комплексного скалярного поля, а просторовий інтеграл від  $j^0$  — як електричний заряд.

Теорему Нотер також можна застосувати до просторово-часових перетворень на зразок трансляцій і обертань. Альтернативно ми можемо описати інфінітезимальну трансляцію

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu,$$

як перетворення поля

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x).$$

Лагранжіан також є скаляром, тому він має перетворюватися таким самим чином:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\mu \partial_\nu (\delta_\mu^\nu \mathcal{L}).$$

Порівнявши цей вираз з (2.10), ми бачимо, що тепер маємо ненульовий струм  $J^\nu$ .<sup>3</sup> Взявши його в розрахунок, можемо застосувати теорему Нотер для одержання чотирьох окремо збережених струмів:

$$T^\nu{}_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}, \quad \text{або} \quad T^{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial^\mu \phi - g^{\nu\mu} \mathcal{L}. \quad (2.17)$$

Це є достоту *тензор енергії-напружень*, який також називається *тензором енергії-імпульсу* поля  $\phi$ . Збережений заряд, пов'язаний з часовими трансляціями, є гамільтоніаном:

$$H = \int T^{00} d^3\mathbf{x} = \int \mathcal{H} d^3\mathbf{x}. \quad (2.18)$$

При обчисленні цієї величини для поля Кляйна–Гордона, можна ще раз отримати результат (2.8). Збережені заряди, пов'язані з просторовими трансляціями, є:

$$P^i = \int T^{0i} d^3\mathbf{x} = - \int \pi \partial_i \phi d^3\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

і ми інтерпретуємо їх як (фізичний) імпульс, що переноситься полем (не плутати з канонічним імпульсом).

## § 2.3. Поле Кляйна–Гордона як система гармонійних осциляторів

Обговорення *квантової* теорії поля почнемо з досить формального розгляду найпростішого випадку — дійсного поля Кляйна–Гордона. Ідея полягає в тому, щоб почати з класичної теорії скалярного поля, описаного лагранжіаном (2.6), а потім „проквантувати“ його, тобто реінтерпретувати динамічні змінні, як оператори, що задовольняють канонічним комутаційним співвідношенням.<sup>4</sup> Далі ми „розв'язуємо“ теорію, знаходячи власні значення та власні стани гамільтоніана, використовуючи для аналогії гармонійний осцилятор.

Класична теорія дійсного поля Кляйна–Гордона була стисло (але достатньо) викладена в попередньому параграфі; відповідні вирази наведено у

<sup>3</sup>А точніше, *чотири* струми (за кількістю ступенів свободи трансляцій), які разом складають тензор другого рангу  $J^\nu{}_\mu = \delta_\mu^\nu \mathcal{L}$ . Відповідно, і чотири збережені струми утворюють тензор. (Прим. перекл.)

<sup>4</sup>Ця процедура називається повторним квантуванням, щоб відрізнити отримане в результаті рівняння Кляйна–Гордона (у якому  $\phi$  є оператором) від старого одночасткового рівняння Кляйна–Гордона (в якому  $\phi$  було хвильовою функцією). У нашому курсі ми ніколи не звертаємося до другої точки зору, а починаємо з класичного рівняння (в якому  $\phi$  є класичним полем) і квантуємо його лише один раз.

формулах (2.6), (2.7) і (2.8). При квантуванні теорії ми дотримуємося тієї ж процедури, що й для будь-якої іншої динамічної системи: перетворюємо  $\phi$  та  $\pi$  на оператори і накладаємо на них відповідні комутаційні співвідношення. Нагадаємо, що для дискретної системи з однієї або кількох часток комутаційні співвідношення є такі:

$$\begin{aligned}[q_i, p_j] &= i\delta_{ij}; \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0.\end{aligned}$$

Узагальнення для безперервної системи цілком природне — оскільки  $\pi(\mathbf{x})$  є *питомим* імпульсом, то замість символу Кронекера беремо дельта-функцію Дірака:

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

(Наразі ми використовуємо картину Шродінгера, в якій  $\phi$  і  $\pi$  не залежать від часу. В наступному параграфі ми перейдемо до картини Гайзенберга, і ці „рівночасові“ комутаційні співвідношення збережуть свою чинність за умови, що обидва оператори розглядаються в один і той же момент часу.)

Гамільтоніан, як функція  $\phi$  і  $\pi$ , також стає оператором. Нашою наступною задачею є пошук його спектру. Оскільки немає очевидного способу зробити це, спробуємо записати рівняння Кляйна–Гордона у фур'є-просторі. Якщо ми розкладемо класичне поле Кляйна–Гордона як

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t)$$

(де  $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$ , тож  $\phi(\mathbf{x})$  дійсна величина), то рівняння (2.7) набуває вигляду

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\mathbf{p}, t) = 0.\tag{2.21}$$

Воно цілком збігається з рівнянням для простого гармонійного осцилятора з частотою

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}.\tag{2.22}$$

З курсу квантової механіки нам відомо, як знаходити спектр простого гармонійного осцилятора. Коротко нагадаємо, як це робиться. Запишемо гамільтоніан у вигляді

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2.$$

Щоб знайти власні значення  $H$ , запишемо  $q$  і  $p$  в термінах *сходових операторів*  $a^\dagger$  та  $a$  (або *операторів народження і знищення*):

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger). \quad (2.23)$$

Канонічні комутаційні співвідношення  $[\phi, \pi] = i$  еквівалентні до

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.24)$$

Тепер гамільтоніан можна переписати як

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

Стан  $|0\rangle$ , такий, що  $a|0\rangle = 0$ , є власним станом  $H$  з власним значенням  $\frac{1}{2}\omega$  — енергією нульових коливань. Крім того, комутатори

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger, \quad [H, a] = -\omega a$$

легко дозволяють встановити, що

$$|n\rangle \equiv (a^\dagger)^n |0\rangle$$

є власними станами  $H$  з власними значеннями  $(n + \frac{1}{2})\omega$ . Ці стани вичерпують спектр.

Ми можемо знайти спектр гамільтоніана Кляйна–Гордона, застосувавши точно такий прийом, проте тепер кожна фур'є-мода поля має розглядатися, як незалежний осцилятор зі своїми власними  $a$  і  $a^\dagger$ . За аналогією з (2.23), пишемо

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}); \quad (2.25)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.26)$$

Зворотні вирази для  $a_{\mathbf{p}}$  і  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  через  $\phi$  і  $\pi$  легко виводяться, але рідко використовуються. Для подальших обчислень корисно переписати (2.25) і (2.26) у такому вигляді:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \quad (2.27)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.28)$$

Комутаційне співвідношення (2.24) стає

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.29)$$

і з нього можемо перекоонатися, що комутатор  $\phi$  і  $\pi$  дає правильний результат:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \times \\ &\quad \times ([a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}] - [a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger]) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}')} = \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.30)$$

(Якщо це й подальші обчислення для вас незвичні, просимо уважно їх проробити; після короткої практики вони стають надзвичайно простими, але мають фундаментальне значення для формалізму наступних двох розділів.)

Тепер ми готові записати гамільтоніан у термінах сходових операторів. Підставляючи в (2.8) вирази для  $\phi$  і  $\pi$ , отримуємо

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 \mathbf{x} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) \times \right. \\ &\quad \times (a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) + \frac{m^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \left. \right\} = \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Другий доданок пропорційний нескінченному  $c$ -числу  $\delta(0)$ . Це є просто сума за всіма модами з енергією нульових коливань  $\omega_{\mathbf{p}}/2$ , тож її присутність цілком очікувана, хоч і викликає певну розгубленість. На щастя, цей нескінченний зсув енергії не може бути виявлений експериментально, оскільки в усіх дослідах вимірюють лише *різницю* між наявною енергією та енергією основного стану  $H$ . Тому ми надалі ігноруватимемо цей нескінченний постійний член у всіх наших обчисленнях. Можливо, такий зсув енергії основного стану здатний створити проблему на глибшому рівні теорії; ми обговоримо це питання в епілозі.

Використовуючи вираз для гамільтоніана в термінах  $a_{\mathbf{p}}$  і  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ , неважко знайти комутатори:

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger; \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad (2.32)$$

А тепер можемо виписати спектр теорії, так само як і для простого гармонійного осцилятора. Стан  $|0\rangle$ , такий, що  $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$  для всіх  $\mathbf{p}$ , є основним

станом, або *вакуумом*, і його енергія  $E = 0$  після відкидання нескінченної константи у (2.31). Решту власних станів енергії можна побудувати через дію операторів народження  $a_p^\dagger$  на  $|0\rangle$ . Стан  $a_p^\dagger a_q^\dagger \cdots |0\rangle$  є власним станом гамільтоніана  $H$  з енергією  $\omega_p + \omega_q + \cdots$ . Ці стани вичерпують спектр.

Знайшовши спектр гамільтоніана, спробуймо дати інтерпретацію його власних станів. Шляхом обчислень, цілком подібних до (2.31), ми можемо записати оператор повного імпульсу (2.19) як

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_p^\dagger a_p. \quad (2.33)$$

Отже, оператор  $a_p^\dagger$  народжує стан з імпульсом  $\mathbf{p}$  та енергією  $\omega_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . Так само стан  $a_p^\dagger a_q^\dagger \cdots |0\rangle$  має імпульс  $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \cdots$ . Цілком природно називати ці збудження *частками*, оскільки вони є дискретними об'єктами з належним релятивістським співвідношенням між імпульсом та енергією. (Під *часткою* ми не маємо на увазі щось локалізоване у просторі;  $a_p^\dagger$  народжує частки як власні стани імпульсу). Відтепер ми замість  $\omega_p$  писатимемо  $E_p$  (або просто  $E$ ), бо насправді це є енергія частки. Зазначимо між іншим, що енергія завжди позитивна:  $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ .

Цей формалізм також дозволяє визначити тип статистики наших часток. Розгляньмо двочастковий стан  $a_p^\dagger a_q^\dagger |0\rangle$ . Оскільки  $a_p^\dagger$  і  $a_q^\dagger$  комутують, то цей стан тотожний стану  $a_q^\dagger a_p^\dagger |0\rangle$ , у якому дві частки переставлені місцями. Більше того, в одній простій моді  $\mathbf{p}$  може перебувати скільки завгодно часток (точно так, як простий гармонійний осцилятор може бути збуджений до довільно високого рівня). З чого ми робимо висновок, що частки Кляйна–Гордона підкоряються *статистиці Бозе–Ейнштейна*.

Природно вибрати нормування вакууму, як  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Одночасткові стани  $|\mathbf{p}\rangle \propto a_p^\dagger |0\rangle$  також часто виникатимуть при нашому розгляді, тому варто домовитися про їх нормування. Найпростіше нормування  $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ , що використовується в багатьох книгах, не є лоренц-інваріантним, в чому ми можемо пересвідчитися, розглядаючи дію бусту в напрямку третьої просторової осі. Такий буст дає:  $p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E)$ ,  $E' = \gamma(E + \beta p_3)$ . Застосовуючи тотожність для дельта-функції

$$\delta[f(x) - f(x_0)] = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (2.34)$$



можемо обчислити

$$\begin{aligned}
 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{dp_3'}{dp_3} = \\
 &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \gamma \left( 1 + \beta \frac{dE}{dp_3} \right) = \\
 &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{\gamma}{E} (E + \beta p_3) = \\
 &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{E'}{E}.
 \end{aligned}$$

Проблема в тому, що об'єм не є інваріантним відносно бустів; ящик, чий об'єм у своїй системі спокою дорівнює  $V$ , у рухомій системі, завдяки лоренцовому скороченню, має об'єм  $V/\gamma$ . Проте з проведеного обчислення ми бачимо, що величина  $E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  лоренц-інваріантна. Відтак визначаємо:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle, \quad (2.35)$$

а отже

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.36)$$

(Множник 2 не є необхідним, але він зручний з огляду на присутність множника 2 в (2.25).)

У гільбертовому просторі квантових станів перетворення Лоренца  $\Lambda$  діє як унітарний оператор  $U(\Lambda)$ . Наша умова нормування (2.35) дає

$$U(\Lambda) |\mathbf{p}\rangle = |\Lambda \mathbf{p}\rangle. \quad (2.37)$$

Застосувавши перетворення Лоренца до оператора  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ , маємо

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda \mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda \mathbf{p}}^{\dagger}. \quad (2.38)$$

При такому нормуванні треба вживати множник  $(2E_{\mathbf{p}})^{-1}$  і в деяких інших виразах. Наприклад, співвідношення повноти для одночасткових станів (1Ч) буде таким:

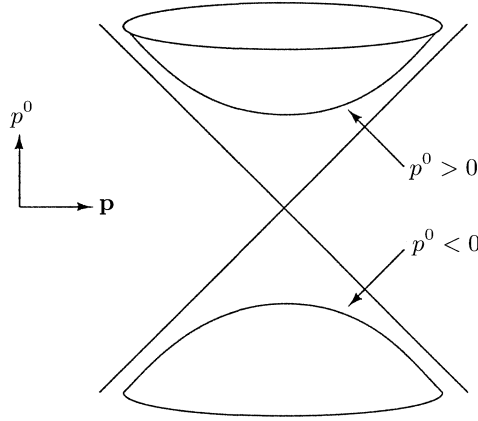
$$J_{1\text{ч}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p} |, \quad (2.39)$$

де оператор зліва є простою тотожністю для одночасткових станів і нульовим на решті гільбертового простору.<sup>5</sup> Інтеграли такого вигляду зустрічатимуться досить часто; і справді, інтеграл

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0} \quad (2.40)$$

<sup>5</sup>Інакше кажучи,  $J_{1\text{ч}}$  є ортогональним проектором на підпростір одночасткових станів гільбертового простору квантової теорії поля — т. зв. простору Фока. (Прим. перекл.)

є лоренц-інваріантним інтегралом по 3-імпульсному простору в тому сенсі, що для будь-якої лоренц-інваріантної  $f(p)$  вираз  $\int d^3\mathbf{p} f(p)/(2E_p)$  є лоренц-інваріантним. Інтегрування проводиться по верхній гілці  $p^0 > 0$  гіперboloїда  $p^2 = m^2$  у 4-імпульсному просторі (Рис. 2.2).



**Рис. 2.2.** Лоренц-інваріантний інтеграл у 3-імпульсному просторі береться по верхній гілці гіперboloїда  $p^2 = m^2$ .

На завершення розглянемо інтерпретацію стану  $\phi(\mathbf{x})|0\rangle$ . Із виразу (2.25) ми бачимо, що

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle \quad (2.41)$$

є лінійною суперпозицією одночасткових станів з визначеним імпульсом. Якби не множник  $(2E_p)^{-1}$ , то (2.41) цілком збігався б з відомим нерелятивістським виразом для власного стану оператора координати  $|\mathbf{x}\rangle$ ; насправді ж додатковий множник майже постійний для малих (нерелятивістських)  $\mathbf{p}$ . Тому надалі ми дотримуватимемося такої ж інтерпретації і вважатимемо, що оператор  $\phi(\mathbf{x})$ , діючи на вакуум, *народжує частку в  $\mathbf{x}$* . Ця інтерпретація отримує додаткове підтвердження, коли обчислити

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( a_{\mathbf{p}'} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} \right) \sqrt{2E_p} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \\ &= e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ми можемо інтерпретувати це як координатне представлення одночасткової хвильової функції  $|\mathbf{p}\rangle$ , так само як у нерелятивістській квантовій механіці  $\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  є хвильовою функцією стану  $|\mathbf{p}\rangle$ .

## § 2.4. Поле Кляйна–Гордона у просторі-часі

У попередньому параграфі ми проквантували поле Кляйна–Гордона в картині Шродінгера і інтерпретували побудовану нами теорію в термінах релятивістських часток. У цьому параграфі перейдемо до картини Гайзенберга, в якій буде легше розглядати залежність величин від часу і питання причинності. Після деякої підготовки ми повернемося до питання причинного розповсюдження, порушеного в § 2.1. Також одержимо вираз для *пропатора Кляйна–Гордона*, важливої складової правил Фейнмана, які буде розроблено в Розділі 4.

У картині Гайзенберга ми робимо  $\phi$  та  $\pi$  залежними від часу звичайним чином — за допомогою оператора еволюції  $e^{-iHt}$ :

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \quad (2.43)$$

і так само для  $\pi(x) = \pi(\mathbf{x}, t)$ . Рівняння руху Гайзенберга,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \quad (2.44)$$

дозволяє знайти залежність  $\phi$  та  $\pi$  від часу:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \left[ \phi(\mathbf{x}, t), \int d^3 \mathbf{x}' \left( \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}', t) \right) \right] = \\ &= \int d^3 \mathbf{x}' (i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \pi(\mathbf{x}', t)) = \\ &= i \pi(\mathbf{x}, t); \\ i \frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \left[ \pi(\mathbf{x}, t), \int d^3 \mathbf{x}' \left( \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}', t) (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}', t) \right) \right] = \\ &= \int d^3 \mathbf{x}' (i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t)) = \\ &= -i (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Об'єднуючи обидва результати, маємо

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\nabla^2 - m^2) \phi, \quad (2.45)$$

що і є рівнянням Кляйна–Гордона.

Ми можемо краще зрозуміти залежність  $\phi(x)$  і  $\pi(x)$  від часу, записавши їх через оператори народження і знищення. Насамперед зазначимо, що

$$H a_p = a_p (H - E_p),$$

а отже,

$$H^n a_p = a_p (H - E_p)^n,$$

для будь-якого  $n$ . Таке ж співвідношення (з заміною „–“ на „+“) справедливе для  $a_p^\dagger$ . Звідси одержуємо тотожності

$$e^{iHt} a_p e^{-iHt} = a_p e^{-iE_p t}, \quad e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} = a_p^\dagger e^{iE_p t} \quad (2.46)$$

які можемо використати після підстановки значення  $\phi(\mathbf{x})$  з (2.25) у (2.43), щоб знайти потрібний вираз для гайзенбергового оператора  $\phi(x)$ . (Ми завжди будемо використовувати символи  $a_p$  і  $a_p^\dagger$  для позначення незалежних від часу сходових операторів у картині Шродінгера.) В результаті,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_p}; \\ \pi(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Варто відзначити, що ми можемо виконати такі ж маніпуляції з  $\mathbf{P}$  замість  $H$ , щоб виразити  $\phi(\mathbf{x})$  через  $\phi(0)$ . За аналогією з (2.46), можна показати:

$$e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} a_p e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} = a_p e^{ip \cdot \mathbf{x}}, \quad e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} a_p^\dagger e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} = a_p^\dagger e^{-ip \cdot \mathbf{x}} \quad (2.48)$$

а відтак,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{i(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} \phi(0) e^{-i(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} = \\ &= e^{ip \cdot x} \phi(0) e^{ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

де  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ . (Позначення тут дещо плутані, але стандартні. Нагадаємо, що  $\mathbf{P}$  — оператор імпульсу, чие власне значення є повним імпульсом системи. Водночас,  $\mathbf{p}$  — імпульс однієї фур'є-моди поля, що його ми інтерпретуємо як імпульс частки в цій моді. Для одночасткового стану з визначеним імпульсом величина  $\mathbf{p}$  є власним значенням оператора  $\mathbf{P}$ .)

Рівняння (2.47) явно демонструє корпускулярно-хвильовий дуалізм квантованого поля  $\phi(x)$ . З одного боку,  $\phi(x)$  представлено оператором у гільбертовому просторі, який народжує і знищує частки, що є квантами збудження поля. З іншого боку,  $\phi(x)$  записано як лінійну комбінацію рішень  $e^{ip \cdot x}$  і  $e^{-ip \cdot x}$  хвильового рівняння Кляйна–Гордона. В експоненті з'являються обидва знаки для часової залежності: ми знаходимо як  $e^{-ip^0 t}$ , так і  $e^{+ip^0 t}$ , причому  $p^0$  завжди позитивний. Якби це були одночасткові хвильові функції, то вони відповідали б станам з позитивною і негативною енергіями; далі ми називатимемо їх *позитивно-* і *негативно-частотними*

модами. Таке поєднання між сходовими операторами і хвильовими формами властиве для всіх вільних квантових полів. Позитивно-частотне рішення рівняння поля має за коефіцієнт оператор *знищення* частки з відповідною одночастковою хвильовою функцією. Негативно-частотне рішення рівняння поля, що є ермітово спряженим до позитивно-частотного, має за коефіцієнт оператор *народження* частки з відповідною одночастковою хвильовою функцією і позитивним значенням енергії. За такої інтерпретації, наявність у релятивістського хвильового рівняння як позитивно-, так і негативно-частотних рішень, не суперечить вимозі, щоб розумна квантова теорія мала лише позитивні енергетичні збудження.

### Причинність

Повернімось тепер до питання причинності, порушеного на початку цього розділу. В наявному формалізмі, що спирається на картину Гайзенберга, амплітуда розповсюдження частки від  $y$  до  $x \in \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ . Позначимо цю величину як  $D(x - y)$ . Кожен оператор  $\phi(x)$  є сумою операторів  $a$  та  $a^\dagger$ , але у виразі для амплітуди ненульовий лише член  $\langle 0 | a_p a_q^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ . Легко переконатися, що в нас залишається тільки

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.50)$$

У (2.40) ми вже довели, що інтеграли такого вигляду лоренц-інваріантні. Тепер обчислимо цей інтеграл для конкретних значень  $x - y$ .

Найперше розглянемо випадок, коли різниця  $x - y$  спрямована вздовж часової осі:  $x^0 - y^0 = t$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ . (Якщо інтервал від  $y$  до  $x$  часоподібний, то завжди знайдеться система, в якій виконується ця умова.) Тоді маємо

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{p^2 + m^2} t} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \\ &\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-imt}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Далі розглянемо випадок, коли різниця  $x - y$  чисто просторова:  $x^0 - y^0 = 0$ ,

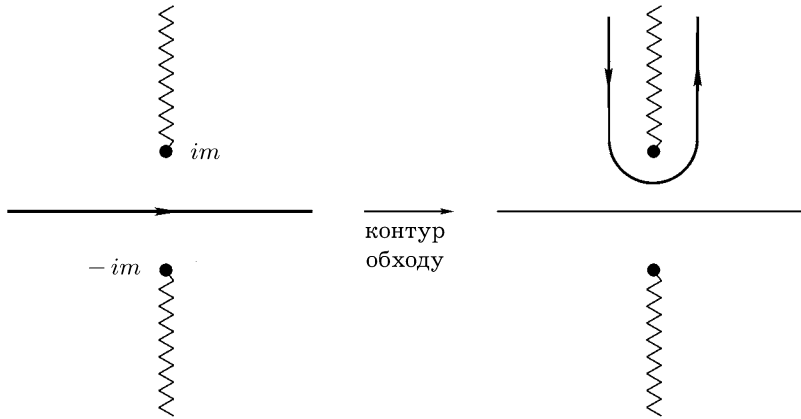
$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$ . Тоді амплітуда така:

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} = \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = \\ &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

Якщо розглядати підінтегральний вираз як функцію комплексної змінної  $p$ , то вона має розрізи вздовж уявної осі, що починаються в точках  $\pm im$  (Рис. 2.3). Для обчислення інтеграла пересунемо контур так, щоб він огорнув розріз у верхній півплощині. Позначивши  $\rho = -ip$ , ми отримуємо

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mr}. \quad (2.52)$$

Отже, поза межами світлового конуса амплітуда експоненційно зменшується, проте залишається ненульовою.



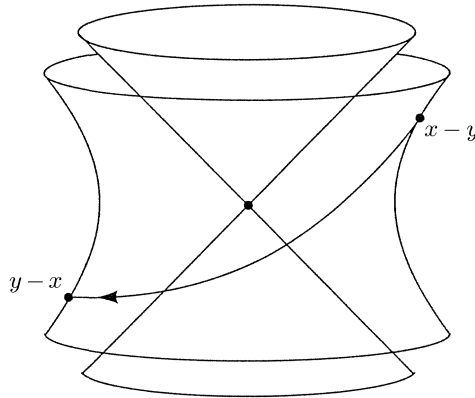
**Рис. 2.3.** Контур для обчислення амплітуди розповсюдження  $D(x - y)$  по простороподібному інтервалу.

Утім, для справжнього розгляду причинності ми мусимо задатися питанням не про те, чи може частка розповсюджуватися на простороподібні інтервали, а про те, чи може *вимірювання* в одній точці вплинути на вимірювання в іншій, якщо ці точки відокремлені простороподібним інтервалом.

Найпростіше, ми можемо спробувати виміряти поле  $\phi(x)$  і для цього маємо вирахувати комутатор  $[\phi(x), \phi(y)]$ ; якщо він нульовий, то одне вимірювання не здатне вплинути на інше. І справді, якщо цей комутатор дорівнює нулю для  $(x - y)^2 < 0$ , то причинність зберігається і в загальному випадку, оскільки комутатори від будь-яких функцій  $\phi(x)$ , включно з  $\pi(x) = \partial\phi/\partial t$ , також будуть нульовими. Звичайно, ми знаємо з рівняння (2.20), що цей комутатор нульовий при  $x^0 = y^0$ ; а зараз проведемо загальніші розрахунки:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \times \\ &\quad \times [(\alpha_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \alpha_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), (\alpha_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot x} + \alpha_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x})] = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) = \\ &= D(x - y) - D(y - x). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Якщо  $(x - y)^2 < 0$ , ми можемо здійснити перетворення Лоренца над другим доданком (позаяк кожен з них лоренц-інваріантний), що переводить  $(x - y) \rightarrow -(x - y)$  (Рис. 2.4). Отже два члени виявляються рівними і скорочуються; причинність зберігається. Зазначимо, що для  $(x - y)^2 > 0$  не існує такого безперервного перетворення Лоренца, щоб  $(x - y) \rightarrow -(x - y)$ . У цьому разі, згідно з (2.51), амплітуда (на щастя) ненульова і для окремого випадку  $x - y = 0$  має приблизний вигляд  $(e^{-imt} - e^{imt})$ . З цього ми робимо висновок, що жодне вимірювання в теорії Кляйна–Гордона не може вплинути інше вимірювання поза межами світлового конуса.



**Рис. 2.4.** Коли різниця  $x - y$  простороподібна, існує таке безперервне перетворення Лоренца, що  $(x - y) \rightarrow -(x - y)$ .

Таким чином, у теорії Кляйна–Гордона дотримується принцип причинності, як ми і стверджували наприкінці § 2.1. Проте для належного розу-

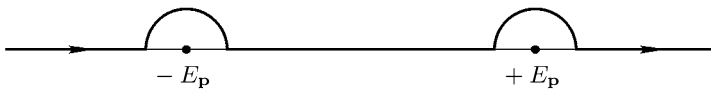
міння цього механізму треба включити в контекст нашого розгляду *комплексне* поле Кляйна–Гордона, що має два різні типи збудження — для часток і античастинок. Як було зазначено при обговоренні (2.15), ми можемо додати в теорію Кляйна–Гордона збережений заряд, вважаючи поле  $\phi(x)$  не дійсним, а комплексним. Після квантування комплексної скалярної теорії поля (див. Задачу 2.2)  $\phi(x)$  народжуватиме позитивно заряджені і знищуватиме негативно заряджені частки, тим часом як  $\phi^\dagger(x)$  діятиме протилежним чином. Тоді комутатор  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$  матиме ненульові складові, які для збереження причинності повинні точно скорочуватися поза світловим конусом. Ці складові мають просторово-часову інтерпретацію двох доданків у (2.53), але вже з приписаними до них зарядами. Перший доданок представлятиме амплітуду розповсюдження негативно зарядженої частки від  $u$  до  $x$ . Другий доданок представлятиме амплітуду розповсюдження позитивно зарядженої частки від  $x$  до  $u$ . Для існування цих двох процесів і точного скорочення їх амплітуд, обидві частки повинні існувати і мати однакові маси. У квантовій теорії поля причинність вимагає, щоб у кожній частки була відповідна античастка з такою ж масою і протилежними квантовими числами (у даному випадку, електричним зарядом). Для дійсного поля Кляйна–Гордона частка є своєю власною античасткою.

### Пропагатор Кляйна–Гордона

Трохи докладніше вивчимо комутатор  $[\phi(x), \phi(y)]$ . Оскільки він є  $c$ -числом, ми можемо записати  $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$ . Цей вираз можна переписати у вигляді чотиривимірної інтеграла, який для  $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) = \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \right) \Big|_{x^0 > y^0} \quad (2.54) \\ &\stackrel{x^0 > y^0}{=} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned}$$

На останньому кроці інтегрування по  $p^0$  виконується вздовж контуру:



Для  $x^0 > y^0$  ми можемо замкнути контур знизу, охопивши обидва полюси для отримання передостаннього рядка у (2.54). Для  $x^0 < y^0$  замкнемо контур згори, отримавши нуль. Таким чином, інтеграл в останньому рядку



(2.54) разом з правилом обходу полюсів є виразом для величини, яку ми позначимо

$$D_R(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle. \quad (2.55)$$

Для розуміння, що являє собою ця величина, проробимо ще одне обчислення:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)D_R(x-y) &= \partial^2 \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \\ &\quad + 2\partial_\mu \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0) (\partial^2 + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \\ &= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \\ &\quad + 2\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + 0 = \\ &= -i\delta^{(4)}(x-y). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Це свідчить про те, що  $D_R(x-y)$  є функцією Гріна оператора Кляйна–Гордона. Оскільки вона нульова при  $x^0 < y^0$ , то це *запізнювальна* функція Гріна.

Якби ми ще не мали формули (2.54), то могли б вивести її за допомогою перетворення Фур'є. Записавши

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_R(p), \quad (2.57)$$

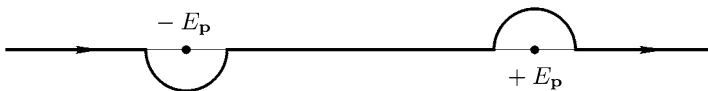
отримуємо алгебраїчний вираз для  $\tilde{D}_R(p)$ :

$$(-p^2 + m^2)\tilde{D}_R(p) = -i.$$

Звідси негайно приходимо до результату:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.58)$$

Інтеграл по  $p^0$  у (2.58) можна обчислити по чотирьох різних контурах, з-поміж яких у (2.54) був використаний лише один. У Розділі 4 ми переконаємося, що інше правило обходу полюсів



є надзвичайно корисним; воно називається *приписом Фейнмана*. Зручний спосіб запам'ятати його, це записати

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (2.59)$$

оскільки полюси тепер знаходяться в точках  $p^0 = \pm(E_p - i\varepsilon)$ , зміщених відповідно нижче й вище дійсної осі. При  $x^0 > y^0$ , ми можемо взяти інтеграл по  $p^0$ , замкнувши контур знизу, і отримаємо амплітуду розповсюдження  $D(x - y)$  з (2.50). При  $x^0 < y^0$  замикаємо контур згори, що дає такий самий вираз, але з переставленими  $x$  і  $y$ . Отже, маємо

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \begin{cases} D(x - y) & \text{для } x^0 > y^0 \\ D(y - x) & \text{для } x^0 < y^0 \end{cases} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Тут  $T$  позначає операцію *хронологічного упорядкування*, яка розташовує „пізніші“ оператори зліва від „раніших“. Застосовуючи до останнього рядка  $(\partial^2 + m^2)$ , ви можете безпосередньо перевірити, що  $D_F$  є функцією Гріна оператора Кляйна–Гордона.

З практичного погляду, вирази (2.59) і (2.60) є найістотнішими результатами цього розділу. Функція Гріна  $D_F(x - y)$  називається *фейнмановим пропагатором* для частки Кляйна–Гордона, оскільки вона, зрештою, є амплітудою розповсюдження. І справді, фейнманів пропагатор виявляється частиною правил Фейнмана, адже саме  $D_F(x - y)$  (або  $D_F(p)$ ) ставиться у відповідність внутрішнім лініям на фейнманових діаграмах, що зображають розповсюдження віртуальних часток.

Проте ми мусимо пройти ще довгий шлях, щоб отримати змогу проводити будь-які реальні обчислення, оскільки досі працювали лише з *вільною* теорією Кляйна–Гордона, у якій рівняння поля є лінійні і відсутня взаємодія. Окремі частки існують у своїх ізольованих модах, не помічаючи одна одну і будь-які інші сорти часток. У такій теорії неможливе проведення жодних спостережень за допомогою розсіяння або інших процесів. Разом з тим, розроблений нами формалізм є надзвичайно важливий, бо вільна теорія формує основу для проведення пертурбативних обчислень у теорії із взаємодією.

## Народження часток класичним джерелом

А втім, є один різновид взаємодії, до вивчення якого ми вже підготовлені. Розглянемо поле Кляйна–Гордона, пов'язане з зовнішнім класичним полем-джерелом  $j(x)$ . Цю ситуацію описує рівняння руху

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x), \quad (2.61)$$

де  $j(x)$  — певна фіксована функція просторово-часових координат, відмінна від нуля лише на обмеженому часовому інтервалі. Якщо ми почнемо розгляд з вакуумного стану, то що отримаємо після того, як  $j(x)$  увімкнеться, а потім знову вимкнеться?

Рівняння поля (2.61) впливає з лагранжіана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + j(x) \Phi(x). \quad (2.62)$$

Для випадку, коли  $j(x)$  вмикається лише на обмежений час, найпростіше розв'язати задачу безпосередньо з польового рівняння. До увімкнення  $j(x)$  поле  $\Phi(x)$  має вигляд

$$\Phi_0(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\alpha_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \alpha_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}).$$

Без джерела це було б справедливо для будь-якого моменту часу. А за наявності джерела рішення рівняння руху можна побудувати з використанням функції Гріна:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0(x) + i \int d^4 y D_R(x-y) j(y) = \\ &= \Phi_0(x) + i \int d^4 y \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \theta(x^0 - y^0) \times \\ &\quad \times (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) j(y). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Якщо ми дочекаємося, поки дія  $j(x)$  залишиться в минулому, то тета-функція дорівнюватиме одиниці на всій ділянці інтегрування. Тоді  $\Phi(x)$  включатиме лише фур'є-компоненти  $j(x)$ ,

$$\tilde{j}(p) = \int d^4 y e^{ip \cdot y} j(y),$$

отримані при таких 4-імпульсах  $p$ , що  $p^2 = m^2$ . Природно згрупувати позитивно-частотні члени разом з  $\alpha_{\mathbf{p}}$ , а негативно-частотні — разом з  $\alpha_{\mathbf{p}}^\dagger$ . Це дасть нам

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left\{ \left( \alpha_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \tilde{j}(p) \right) e^{-ip \cdot x} + \text{e. c.} \right\}. \quad (2.64)$$

Тепер ми можемо вгадати (або вирахувати) форму гамільтоніана після дії  $j(x)$ . Для цього треба просто замінити  $\alpha_{\mathbf{p}}$  на  $(\alpha_{\mathbf{p}} + i\tilde{j}(p)/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}})$ :

$$H = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left( \alpha_{\mathbf{p}}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \tilde{j}^*(p) \right) \left( \alpha_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \tilde{j}(p) \right).$$

Енергія системи після вимикання джерела є

$$\langle 0|H|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} |\tilde{j}(p)|^2, \quad (2.65)$$

де  $|0\rangle$ , як і раніше, позначає основний стан вільної теорії. Ми можемо інтерпретувати ці результати в термінах часток, ототожнивши  $|\tilde{j}(p)|^2/2E_p$  з питомою ймовірністю народження частки в моді  $p$ . Тоді загальна кількість народжених часток є

$$\int dN = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\tilde{j}(p)|^2. \quad (2.66)$$

При народженні часток істотними є лише ті фур'є-компоненти  $j(x)$ , які перебувають у резонансі з хвилями Кляйна–Гордона на „масовій поверхні“ (тобто,  $p^2 = m^2$ ).

Ми повернемося до цього питання в Задачі 4.1. А в Розділі 6 вивчимо схожу ситуацію з народженням фотонів прискореним електроном (гальмівне випромінювання).

## Задачі

### 2.1. Класичний електромагнетизм (без джерел) впливає з дії

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad \text{де} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

- (a)** Отримайте рівняння Максвела як рівняння Ейлера–Лагранжа для цієї дії, розглядаючи компоненти  $A(x)$  як динамічні змінні. Запишіть рівняння в стандартному вигляді, ототожнивши  $E^i = -F^{0i}$  і  $\varepsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$ .
- (b)** Побудуйте тензор енергії-імпульсу для цієї теорії. Зважте, що звичайна процедура не дає в результаті симетричного тензора. Щоб виправити це, можете додати до  $T^{\mu\nu}$  член у вигляді  $\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$ , де  $K^{\lambda\mu\nu}$  є антисиметричним за двома першими індексами. Такий доданок автоматично має нульову дивергенцію за індексом  $\mu$ . Отже,

$$\hat{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$$

також є тензором енергії-імпульсу з тими ж самими глобально збереженими енергією та імпульсом. Покажіть, що така побудова з

$$K^{\lambda\mu\nu} = F^{\mu\lambda} A^\nu,$$

дає симетричний тензор енергії-імпульсу  $\hat{T}$  і призводить до стандартних формул для питомих енергії та імпульсу електромагнітного поля:

$$\mathcal{E} = \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

**2.2. Комплексне скалярне поле.** Розгляньте теорію комплекснозначного скалярного поля, що задовольняє рівнянню Кляйна–Гордона. Дія в цій теорії є

$$S = \int d^4x (\pi^* \pi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi).$$

Простіше аналізувати цю теорію, розглядаючи як основні динамічні величини  $\phi(x)$  і  $\phi^*(x)$ , а не дійсну й уявну складові  $\phi(x)$ .

- (a) Знайдіть спряжені імпульси до  $\phi(x)$  й  $\phi^*(x)$  та канонічні комутаційні співвідношення. Покажіть, що гамільтоніан є

$$H = \int d^3\mathbf{x} (\pi^* \pi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi).$$

Отримайте гайзенбергове рівняння руху для  $\phi(x)$  і покажіть, що воно справді є рівнянням Кляйна–Гордона.

- (b) Діагоналізуйте  $H$  за допомогою операторів народження і знищення. Покажіть, що теорія включає два типи часток з масою  $m$ .
- (c) Перепишіть збережений заряд

$$Q = \int d^3\mathbf{x} \frac{i}{2} (\phi^* \pi^* - \phi \pi)$$

у термінах сходових операторів і вирахуйте заряд часток кожного типу.

- (d) Розгляньте випадок двох комплексних полів Кляйна–Гордона з однакою масою. Позначте поля як  $\phi_a(x)$ , де  $a = 1, 2$ . Покажіть, що тепер мають місце чотири збережені заряди — один, отриманий як узагальнення виразу в (c), а інші три, що визначаються формулою

$$Q^i = \int d^3\mathbf{x} \frac{i}{2} (\phi_a^* (\sigma^i)_{ab} \pi_b^* - \pi_a^* (\sigma^i)_{ab} \phi_b^*),$$

де  $\sigma^i$  є сигма-матриці Паулі. Покажіть, що ці три заряди мають комутаційні співвідношення операторів моменту імпульсу (група  $SU(2)$ ). Узагальніть ці результати на випадок  $n$  однакових комплексних скалярних полів.

**2.3.** Обчисліть інтеграл

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

у явному вигляді через функції Бесселя для простороподібного  $(x-y)$ , позначивши  $(x-y)^2 = -r^2$ .

## Розділ 3

### Діракове поле

Докладно розглянувши найпростіше з релятивістських рівнянь поля, ми тепер перейдемо до другого за простотою рівняння Дірака. Можливо, ви вже знайомі з цим рівнянням у його первісному трактуванні як одночасткового квантовомеханічного хвильового рівняння.<sup>6</sup> У цьому розділі наша точка зору буде цілком іншою. Спершу ми отримаємо рівняння Дірака, як *класичне* релятивістське рівняння поля, особливо акцентуючи на його релятивістській інваріантності. Потім у § 3.5 проквантуємо діракове поле схожим чином з тим, що був застосований до поля Кляйна–Гордона.

#### § 3.1. Лоренц-інваріантність хвильових рівнянь

Передовсім мусимо задатися питанням, якого вже торкнулися в Розділі 2: яке значення ми вкладаємо в слова, що рівняння є „релятивістськи інваріантним“? Найприйнятніше визначення таке: якщо  $\phi$  є полем або сукупність полів, а  $\mathcal{D}$  — певний диференційний оператор, то твердження, що  $\mathcal{D}\phi = 0$  релятивістськи-інваріантне, означає, що в разі, коли  $\phi(x)$  задовольняє цьому рівнянню, і ми здійснюємо перехід (обертання або буст) до іншої системи відліку, то перетворене поле в новій системі відліку задовольнятиме тому ж самому рівнянню. Еквівалентно, ми можемо уявити, що всі частки або поля зазнали обертання (або бусту) на однаковий кут (або швидкість); тоді рівняння  $\mathcal{D}\phi = 0$  має залишатися чинним і після перетворення. Надалі ми обиратимемо цю „активну“ точку зору.

Лагранжове формулювання теорії поля істотно полегшує розгляд лоренц-інваріантності. Рівняння руху є автоматично лоренц-інваріантним за вищевказаним визначенням, якщо лагранжіан, з якого воно випливає, є лоренцовим *скаляром*. Це є безпосереднім наслідком принципу найменшої

---

<sup>6</sup>Це питання розглянуте, наприклад, у Шіффа [49], Розділ 13; Бейма [7], Розділ 23; Сакураї [48], Розділ 3. Хоча наш виклад самодостатній, ми рекомендуємо, щоб ви також вивчили й одночасткове рівняння Дірака за однією з зазначених книжок. (Або ж за книжками Бйоркена і Дрелла [9], Розділи 1-4; Дірака [66], Розділ 11; Вакарчука [65], Розділ 10; Мессія [68], Розділ 20, — *перекл.*)

дії: якщо буст залишають лагранжіан незмінним, то перетворений екстремум дії знову буде екстремумом.

За приклад розглянемо теорію Кляйна–Гордона. Ми можемо записати довільне перетворення Лоренца, як

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (3.1)$$

для певної  $4 \times 4$  матриці  $\Lambda$ . Що станеться з полем Кляйна–Гордона  $\phi(x)$  при цьому перетворенні? Розглянемо поле  $\phi(x)$ , як локальну міру деякої величини, розподіленої в просторі. Якщо відбувається накопичення цієї величини в  $x = x_0$ , то  $\phi(x)$  матиме максимум у  $x_0$ . Якщо тепер ми піддамо початковий розподіл бустові, то новий розподіл матиме максимум у  $x = \Lambda x_0$ . Це проілюстровано на Рис. 3.1(а). Відповідне перетворення поля є

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (3.2)$$

Тобто перетворене поле, обчислене в перетвореній через буст точці, дає таке ж значення, як і початкове поле, обчислене в в цій же точці до бусту.

Ми маємо переконатися, що це перетворення залишає незмінною форму лагранжіана Кляйна–Гордона. Згідно з (3.2), масовий член  $\frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$  просто зміщується в точку  $(\Lambda^{-1}x)$ . Перетворення  $\partial_\mu\phi(x)$  дає

$$\partial_\mu\phi(x) \rightarrow \partial_\mu(\phi(\Lambda^{-1}x)) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (\partial_\nu\phi)(\Lambda^{-1}x). \quad (3.3)$$

Оскільки метричний тензор  $g^{\mu\nu}$  лоренц-інваріантний, матриці  $\Lambda^{-1}$  задовольняють тотожності:

$$(\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}. \quad (3.4)$$

Використовуючи це співвідношення, ми можемо вивести закон перетворення кінетичного члена в лагранжіані Кляйна–Гордона:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\phi(x))^2 &\rightarrow g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi'(x))(\partial_\nu\phi'(x)) = \\ &= g^{\mu\nu}[(\Lambda^{-1})^\rho_\mu \partial_\rho\phi][(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu \partial_\sigma\phi](\Lambda^{-1}x) = \\ &= g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)(\Lambda^{-1}x) = \\ &= (\partial_\mu\phi)^2(\Lambda^{-1}x). \end{aligned}$$

Отже, весь лагранжіан перетворюється просто як скаляр:

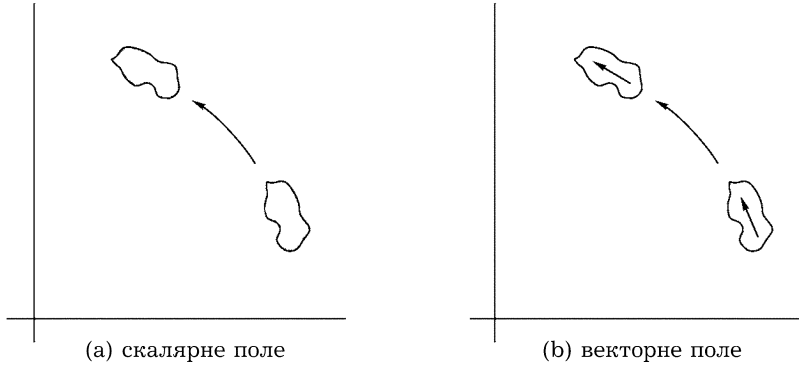
$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \quad (3.5)$$

Дія  $S$ , утворена інтегруванням  $\mathcal{L}$  по простору-часу, лоренц-інваріантна. Схожі обчислення показують, що рівняння руху також лоренц-інваріантне:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)\phi'(x) &= [(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})^{\sigma\mu} \partial_\sigma + m^2]\phi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= (g^{\nu\sigma} \partial_\nu \partial_\sigma + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) \\ &= 0. \end{aligned}$$



Закон перетворення (3.2), застосований до  $\phi$ , є найпростішим з усіх можливих законів перетворення полів. І він є єдиною можливим для полів, що мають лише один компонент. Проте нам відомі приклади багатоконден-



**Рис. 3.1.** Обертання векторного поля впливає як на розміщення ділянки його конфігурації, так і на *орієнтацію* вектора.

тних полів, що перетворюються складнішим чином. Найзнайомішим нам випадком є векторне поле, наприклад, питомий 4-струм  $j^\mu(x)$  або вектор-потенціал  $A^\mu(x)$ . У цьому разі величина, розподілена в просторі-часі, має також і орієнтацію, що змінюється при обертаннях і бустах. Як показано на Рис. 3.1(b), орієнтація має обертатися в тому ж напрямку, що й точка, в якій обчислюється поле:

$$\begin{aligned} \text{при тривимірних обертаннях} \quad V^i(x) &\rightarrow R^{ij}V^j(R^{-1}x); \\ \text{при перетвореннях Лоренца} \quad V^\mu(x) &\rightarrow \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тензори довільного рангу можуть бути побудовані з векторів простим додаванням індексів і відповідним збільшенням кількості множників  $\Lambda$  в законі перетворення. Використовуючи такі векторні й тензорні поля, ми можемо записати цілу низку лоренц-інваріантних рівнянь, наприклад, рівняння Максвела,

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{або} \quad \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0,$$

що впливають із лагранжіана

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2. \quad (3.7)$$

Взагалі, будь-яке рівняння, кожен член якого має однакову кількість незгорнутих лоренцових індексів, автоматично буде інваріантним відносно перетворень Лоренца.

Такий метод тензорних позначень породжує великий клас лоренц-інваріантних рівнянь, проте їх виявляється значно більше. Як нам їх знайти? Ми могли б спробувати систематично відшукати всі можливі закони перетворення для поля. Тоді було б неважко виписати інваріантні лагранжіани. Для простоти обмежимо нашу увагу лінійними перетвореннями, і таким чином, якщо  $\Phi_a$  є  $n$ -компонентним мультиплетом, закон лоренцового перетворення визначається  $n \times n$  матрицею  $M(\Lambda)$ :

$$\Phi_a \rightarrow M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x). \quad (3.8)$$

Можна показати, що найзагальніші нелінійні перетворення виводяться цих лінійних законів, а отже, немає потреби розглядати перетворення, більш загальні, ніж (3.8). При подальшому обговоренні ми ігноруватимемо зміну аргументу поля і будемо записувати перетворення (3.8) у формі:

$$\Phi \rightarrow M(\Lambda)\Phi. \quad (3.9)$$

Який припустимий вигляд матриць  $M(\Lambda)$ ? Основне обмеження на  $M(\Lambda)$  можна знайти при розгляді двох послідовних перетворень  $\Lambda$  і  $\Lambda'$ . Їхній результат має бути новим лоренцовим перетворенням  $\Lambda''$ ; тобто перетворення Лоренца утворюють *групу*. Це дає умову узгодженості, якій змушені задовольняти матриці  $M(\Lambda)$  при послідовній дії двох перетворень:

$$M(\Lambda')M(\Lambda) = M(\Lambda'') \quad \text{для} \quad \Lambda'\Lambda = \Lambda''. \quad (3.10)$$

Отже, відповідність між матрицями  $M$  і перетвореннями  $\Lambda$  має зберігатися при їх перемноженні. З погляду математики це означає, що матриці  $M$  мають утворювати  $n$ -вимірне *представлення* групи Лоренца. Таким чином, наше завдання зводиться до пошуку скінченновимірних матричних представлень групи Лоренца.

Перш ніж розглянути це питання для групи Лоренца, вивчимо простішу групу тривимірних обертань. Ця група має представлення будь-якої розмірності  $n$ , відомі в квантовій механіці як матриці, що обертають  $n$ -компонентні хвильові функції часток з різними спінами. Розмірність пов'язана зі спіновим квантовим числом  $s$  формулою  $n = 2s + 1$ . Найважливішим нетривіальним представленням є двовимірне представлення, що відповідає спінові  $1/2$ . Матриці цього представлення є  $2 \times 2$  унітарні матриці з детермінантом 1, які можна виразити як

$$U = e^{-i\theta^i \sigma^i / 2}, \quad (3.11)$$

де  $\theta^i$  — три довільні параметри, а  $\sigma^i$  — сигма-матриці Паулі.

Для будь-якої безперервної групи, нескінченно близькі до тотожного (інфінітезимальні) перетворення визначають векторний простір, що називається *алгеброю Лі* цієї групи. Базисні вектори цього векторного простору називаються *генераторами* алгебри Лі, або групи Лі. Для групи обертань генераторами є оператори моменту імпульсу  $J^i$ , що задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \quad (3.12)$$

Оператори обертання на скінченний кут формуються експоненціюванням цих генераторів. У квантовій механіці оператор

$$R = \exp[-i\theta J^i] \quad (3.13)$$

дає обертання на кут  $|\theta|$  довкола осі  $\hat{\theta}$ . Комутаційні співвідношення операторів  $J^i$  визначають закони множення цих операторів обертання. Отже, набір матриць, що задовольняють комутаційним співвідношенням (3.12), утворює шляхом експоненціювання в (3.13) представлення групи обертань. У прикладі з попереднього абзацу представлення операторів моменту імпульсу

$$J^i \rightarrow \frac{\sigma^i}{2} \quad (3.14)$$

утворює представлення групи обертань (3.11). Справедливе загальне твердження, що для отримання матричного представлення безперервної групи належить знайти матричні представлення генераторів цієї групи (які мають задовольняти відповідним комутаційним співвідношенням), а потім експоненціювати ці інфінітезимальні перетворення.

У випадку нашої задачі нам треба знати комутаційні співвідношення генераторів групи лоренцових перетворень. Для групи обертань можна отримати комутаційні співвідношення, записавши генератори як диференційні оператори; із виразу

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (-i\nabla) \quad (3.15)$$

прямо впливають комутаційні співвідношення (3.12) для моменту імпульсу. Використання векторного добутку в (3.15) властиво для тривимірного простору. А проте, ми також можемо записати оператори як антисиметричний тензор,

$$J^{ij} = -i(x^i \nabla^j - x^j \nabla^i),$$

де  $J^3 = J^{12}$  і так далі. Узагальнення на чотиривимірні лоренцові перетворення тепер стає цілком природним:

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (3.16)$$

Невдовзі ми побачимо, що ці шість операторів генерують три бусту і три просторові обертання групи Лоренца.

Для визначення комутаційних правил в алгебрі Лоренца ми можемо просто вирахувати комутатори диференційних операторів (3.16). В результаті маємо

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}). \quad (3.17)$$

Будь-які матриці, що представляють цю алгебру, мають задовольняти таким самим комутаційним правилам.

Аби побачити, що ми маємо в правій частині виразу, розглянемо одне конкретне представлення (яке ми просто витягнемо, немов кролика з капелюха). Маємо  $4 \times 4$ -матриці

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu}). \quad (3.18)$$

(Тут  $\mu$  і  $\nu$  нумерують кожну з шести матриць, тоді як  $\alpha$  і  $\beta$  нумерують матричні компоненти.<sup>7</sup>) Можемо легко перевірити, що ці матриці задовольняють комутаційним співвідношенням (3.17). І справді, вони є не що інше, як матриці, що діють на звичайні лоренцові 4-вектори. Щоб побачити це, параметризуємо інфінітезимальні перетворення наступним чином:

$$V^{\alpha} \rightarrow \left( \delta_{\beta}^{\alpha} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} \right) V^{\beta}. \quad (3.19)$$

де  $V$  є 4-вектором, а  $\omega_{\mu\nu}$  — антисиметричний тензор, що задає інфінітезимальний кут. Для прикладу розглянемо випадок  $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ , а решта компонентів  $\omega$  дорівнюють нулю. Тоді (3.19) має вигляд

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \quad (3.20)$$

що є просто інфінітезимальним обертанням у площині  $(x, y)$ . Також можемо перевірити, що при значеннях  $\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta$  отримаємо

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \quad (3.21)$$

інфінітезимальний буст у напрямку осі  $x$ . Інші компоненти  $\omega$  таким самим чином генерують решту бустів і просторових обертань.

<sup>7</sup>Власне кажучи, поділ індексів у  $(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$  на ті, що позначають різні матриці, і ті, що позначають їхні компоненти, є чисто умовним, бо насправді  $J$  — тензор четвертого рангу у просторі з метрикою Мінковського. Саме остання обставина відрізняє це представлення (векторне) від описаного в наступному пункті спірного, хоча на перший погляд і там, і там використовуються  $4 \times 4$  матриці. (Прим. перекл.)

## Рівняння Дірака

Тепер, коли ми знайшли одне скінченновимірне представлення групи Лоренца, наступним логічним кроком має стати розроблення формалізму для знаходження всіх інших представлень. Дарма, що це не надто важке завдання (Задача 3.1), навряд чи це є необхідним для нас, оскільки ми найбільше зацікавлені в тих представленнях, що відповідають спінові  $1/2$ .

Ми можемо знайти таке представлення, вдавшись до прийому, що належить Діракові. Припустимо, що маємо набір з чотирьох  $n \times n$  матриць  $\gamma^\mu$ , які задовольняють антикомутаційним співвідношенням

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n \times n} \quad (\text{алгебра Дірака}). \quad (3.22)$$

Тоді можемо негайно записати  $n$ -вимірне представлення алгебри Лоренца. Воно має вигляд:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.23)$$

Повторно застосувавши (3.22), легко переконатися, що ці матриці задовольняють комутаційним співвідношенням (3.17).

Це обчислення можна провести у просторі будь-якої розмірності, з лоренцевою або евклідовою метрикою. Зокрема, воно має бути справедливим у тривимірному евклідовому просторі; і справді, ми можемо просто записати

$$\begin{aligned} \gamma^j &\equiv i\sigma^j \quad (\text{сигма-матриці Паулі}), \\ \text{а отже, } \{\gamma^i, \gamma^j\} &= -2\delta^{ij}. \end{aligned}$$

Множник  $i$  в першому рядку і знак мінус у другому є чистою умовністю.

Тоді в матрицях, що представляють алгебру Лоренца,

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \sigma^k, \quad (3.24)$$

ми впізнаємо відоме двовимірне представлення групи обертань.

Тепер знайдемо матриці Дірака  $\gamma^\mu$  для чотиривимірного простору Мінковського. Виявляється, що вони мають бути якнайменше  $4 \times 4$ , бо не існує четвертої  $2 \times 2$  матриці, яка антикомутує з трьома сигма-матрицями Паулі. Крім того, всі  $4 \times 4$  представлення алгебри Дірака унітарно еквівалентні.<sup>8</sup> Отже, нам достатньо виписати лише одну явну реалізацію алгебри Дірака. Одне представлення, у вигляді  $2 \times 2$  блоків, є

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

<sup>8</sup>Це і попереднє твердження впливають з загальної теорії представлень групи Лоренца, викладеної в Задачі 3.1.

Це представлення називається *вейлевим* або *кіральним*. Ми переконаємося, що воно надзвичайно зручне, і використовуватимемо його протягом усієї книги. (Проте будьте пильні, бо багато підручників з теорії поля обирають інше представлення, у якому  $\gamma^0$  є діагональною. І поза тим, у книжках, де працюють з кіральним представленням, часто обирають іншу домовленість про знаки.)

У нашому представленні, генератори бустів та просторових обертань є

$$S^{0i} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

і

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \Sigma^k. \quad (3.27)$$

Чотирикомпонентне поле  $\psi$ , що перетворюється при бустах і обертаннях згідно з (3.26) і (3.27), називають *діраковим спінором*. Зазначимо, що генератори обертань  $S^{ij}$  є достоту тривимірною спіornoю матрицею перетворень (3.24), повтореною двічі. Генератори бустів  $S^{0i}$  не є самоспряженими, а отже, наша реалізація бустів не є унітарною (це справедливо і для векторного представлення (3.18).) І справді, група Лоренца „некомпактна“, а отже, не має однозначних скінченновимірних унітарних представлень. Утім, для нас це неістотно, оскільки  $\psi$  не хвильова функція, а класичне поле.

Тепер, коли ми знаємо закон перетворення для  $\psi$ , мусимо знайти відповідне рівняння поля. Одним з можливих є рівняння Кляйна–Гордона:

$$(\partial^2 + m^2) \psi = 0 \quad (3.28)$$

Воно спрацьовує, бо спіornoї матриці перетворення (3.26) і (3.27) діють лише у „внутрішньому“ просторі і жодним чином не впливають на диференційний оператор. Проте можна написати й жорсткіше рівняння першого порядку, що включає в себе (3.28) і водночас містить додаткову інформацію. Для цього маємо знати ще одну властивість  $\gamma$ -матриць. Нескладні підрахунки дозволяють перевірити, що

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

або, еквівалентно,

$$(1 + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}) \gamma^\mu (1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}) = (1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Це рівняння є інфінітезимальною формою від

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (3.29)$$

де

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \quad (3.30)$$

є спіновим представленням перетворення Лоренца  $\Lambda$  (порівняйте з наведеним у (3.19) чисто векторним представленням). Рівняння (3.29) засвідчує, що  $\gamma$ -матриці інваріантні відносно одночасного перетворення за векторними і спіновими компонентами (так само, як  $\sigma^i$  інваріантні при просторових обертаннях). Іншими словами, ми можемо сприймати векторний індекс  $\mu$  в  $\gamma^\mu$  серйозно і брати скалярний добуток  $\gamma^\mu$  з  $\partial_\mu$  для утворення лоренц-інваріантного диференційного оператора.

Тепер ми готові записати рівняння Дірака:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (3.31)$$

Щоб показати його лоренц-інваріантність, проведемо над його частиною перетворення Лоренца і обчислимо:

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi(x) &\rightarrow [i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} [i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \left[ i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m \right] \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \left[ i\Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m \right] \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} [i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \psi(\Lambda^{-1}x) = 0. \end{aligned}$$

Аби побачити, що рівняння Дірака містить в собі рівняння Кляйна–Гордона, допишемо зліва від нього  $(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi = \\ &= (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \psi = \\ &= \left( \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right) \psi = \\ &= (\partial^2 + m^2) \psi. \end{aligned}$$

Для знаходження лагранжіана теорії Дірака ми маємо вгадати, як перемножити два діракові спінори, щоб отримати лоренцовий скаляр. Найочевидніше припущення,  $\psi^\dagger \psi$ , не годиться. При лоренцовому бусті це дає  $\psi^\dagger \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi$ ; якби матриця бусту була унітарна, ми мали б  $\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$ , і все було б гаразд. Проте  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  не є унітарною, бо генератори (3.26) несамоспряжені.

Рішення проблеми полягає в запровадженні *діраково спряженого* спінора:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (3.32)$$

При інфінітезимальному перетворенні Лоренца, параметризованого через  $\omega_{\mu\nu}$ , маємо  $\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})^\dagger\right) \gamma^0$ . Сума по  $\mu$  і  $\nu$  має шість різних ненульових доданків. У членах, що відповідають обертанню ( $\mu$  та  $\nu$  обидва відмінні від нуля),  $(S^{\mu\nu})^\dagger = S^{\mu\nu}$ , і  $S^{\mu\nu}$  комутує з  $\gamma^0$ . У бустових членах, де  $\mu$  або  $\nu$  дорівнюють нулю,  $(S^{\mu\nu})^\dagger = -S^{\mu\nu}$ , але  $S^{\mu\nu}$  антикомутує з  $\gamma^0$ . Перенесення  $\gamma^0$  наліво усуває ермітове спряження з  $S^{\mu\nu}$ , що дає нам закон перетворення

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}, \quad (3.33)$$

а отже, величина  $\bar{\psi}\psi$  є лоренцовим скаляром. Схожим чином ми можемо показати, за допомогою (3.29), що  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  є лоренцовим вектором.

Тому правильний лоренц-інваріантний лагранжіан Дірака є

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (3.34)$$

Рівняння Ейлера–Лагранжа для  $\bar{\psi}$  (або  $\psi^\dagger$ ) негайно призводить до рівняння Дірака у вигляді (3.31); а рівняння Ейлера–Лагранжа для  $\psi$  дає таке ж рівняння в ермітово спряженій формі:

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0. \quad (3.35)$$

### Вейлеві спінори

З блочно-діагональної форми генераторів (3.26) і (3.27) очевидно, що діракове представлення групи Лоренца є *привідним*.<sup>9</sup> Ми можемо утворити два двовимірні представлення, розглянувши кожен блок окремо і записавши

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Двокомпонентні об'єкти  $\psi_L$  та  $\psi_R$  називаються лівополяризованим і правополяризованим *вейлевіми спінорами*. Ви можете легко переконатися, що закони їх перетворення при інфінітезимальних обертаннях  $\theta$  і бустах  $\beta$  є такі:

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow \left(1 - i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} - \beta \cdot \frac{\sigma}{2}\right) \psi_L; \\ \psi_R &\rightarrow \left(1 - i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} + \beta \cdot \frac{\sigma}{2}\right) \psi_R. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ці закони пов'язані між собою комплексним спряженням. Застосувавши тожність

$$\sigma^2 \sigma^* = -\sigma \sigma^2, \quad (3.38)$$

<sup>9</sup>Якби ми працювали з іншим представленням гамма-матриць, привідність була б не така очевидна. Це, власне, і є головною причиною використання кірального представлення.



неважко показати, що величина  $\sigma^2 \psi_L^*$  перетворюється як правополяризований спінор.

В термінах  $\psi_L$  і  $\psi_R$  рівняння Дірака має вигляд:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (3.39)$$

Два представлення групи Лоренца  $\psi_L$  і  $\psi_R$  змішуються в рівнянні Дірака за рахунок масового члена. Але якщо встановити  $m = 0$ , то рівняння для  $\psi_L$  і  $\psi_R$  роз'єднуються:

$$\begin{aligned} i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) \psi_L &= 0; \\ i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \psi_R &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Це так звані *рівняння Вейля*; вони особливо важливі при вивченні нейтрино та теорії слабкої взаємодії.

Є можливість трохи покращити їх запис. Введемо за означенням

$$\sigma^\mu \equiv (1, \sigma), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma), \quad (3.41)$$

отже,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

(Риска в  $\bar{\sigma}$  не має жодного стосунку до риски в  $\bar{\psi}$ .) Тоді рівняння Дірака можна записати як

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma \cdot \partial \\ i\bar{\sigma} \cdot \partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

а рівняння Вейля:

$$i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi_L = 0, \quad i\sigma \cdot \partial \psi_R = 0. \quad (3.44)$$

### § 3.2. Рішення рівняння Дірака для вільних часток

Щоб виразніше відчувати фізику в рівнянні Дірака, розглянемо його плоскохвильове рішення. Оскільки діракове поле  $\psi$  задовольняє рівнянню Кляйна–Гордона, ми відразу знаємо, що воно може бути записане як лінійна комбінація плоских хвиль:

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad \text{де} \quad p^2 = m^2. \quad (3.45)$$

Тимчасово зосередимося на рішеннях з позитивною частотою, тобто  $p^0 > 0$ . Вектор-стовпець  $u(p)$  має задовольняти додатковому обмеженню, яке можна отримати при підстановці (3.45) у рівняння Дірака:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0. \quad (3.46)$$

Найпростіше проаналізувати це рівняння в системі спокою, де  $p = p_0 = (m, \mathbf{0})$ ; а загальне рішення для довільного значення  $p$  можна потім отримати шляхом бусту  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ . У системі спокою рівняння (3.46) набуває вигляду

$$(m\gamma^0 - m) u(p_0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0,$$

а його рішення є

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

для будь-якого числового двокомпонентного спінора  $\xi$ . Домовимося нормувати  $\xi$  так, щоб  $\xi^\dagger \xi = 1$ ; множник  $\sqrt{m}$  введено для подальшої зручності. Ми можемо інтерпретувати спінор  $\xi$ , розглядаючи генератор обертань (3.27):  $\xi$  перетворюється при цьому як типовий двокомпонентний спінор групи обертань, а отже, він звичайним чином визначає спінову орієнтацію рішення рівняння Дірака. Наприклад, коли  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то спін частки спрямовано вгору вздовж третьої осі.

Зазначимо, що після застосування рівняння Дірака можна довільно обрати лише два з чотирьох компонентів  $u(p)$ . Це саме те, чого ми потребували, оскільки частка зі спіном  $1/2$  має лише два фізичні спінові стани — вгору і вниз. (Звісно, ми трохи передчасно завели мову про частки та спіни. У § 3.5, проквантувавши поле Дірака, ми доведемо, що спіновий момент імпульсу діракової частки є  $\frac{\hbar}{2}$ ; а наразі лише зауважимо, що для кожного  $p$  є два можливі рішення  $u(p)$ .)

Тепер, коли ми маємо загальний вираз для  $u(p)$  в системі спокою, можемо отримати  $u(p)$  у будь-якій іншій системі шляхом бусту. Розглянемо буст уздовж третьої осі. Спершу мусимо нагадати собі, як діє буст на 4-вектор. В інфінітезимальній формі

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[ 1 + \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix},$$

де  $\eta$  є деякий нескінченно малий параметр. Для скінченного  $\eta$  маємо написати

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} &= \exp \left[ \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left[ \cosh \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sinh \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Параметр  $\eta$  називається *стрімкістю*. Ця величина є адитивною при послідовних бустах.

Тепер застосуємо той самий буст до  $u(p)$ . Згідно з рівняннями (3.26) і (3.30), маємо

$$\begin{aligned}
 u(p) &= \exp\left[-\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix} = \\
 &= \left[\cosh\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - \sinh\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix}e^{\eta/2}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) + e^{-\eta/2}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) & 0 \\ 0 & e^{\eta/2}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) + e^{-\eta/2}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\end{pmatrix}\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix}\left\{\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right)\right\}\xi \\ \left\{\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\right\}\xi\end{pmatrix}. \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Останній рядок можна спростити й отримати

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi\end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

де квадратний корінь від матриці слід розуміти так, що береться позитивне значення квадратного кореня від кожного її власного значення. Цей вираз для  $u(p)$  не лише компактніший, а й зберігає чинність для довільного напрямку  $\mathbf{p}$ . Працюючи з виразами такого типу, корисно знати тотожність

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2. \tag{3.51}$$

Ви можете безпосередньо перевірити, що (3.50) є рішенням рівняння Дірака у формі (3.43).

На практиці зазвичай зручніше працювати з конкретними спінорами  $\xi$ . Корисним вибором були б тут власні стани  $\sigma^3$ . Наприклад, якщо  $\xi = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$  (спін угору вздовж третьої осі), ми маємо

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{великий буст}} \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

тоді як для  $\xi = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$  (спін униз уздовж третьої осі)

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \\ \sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{великий буст}} \sqrt{2E}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

При  $\eta \rightarrow \infty$  стани вироджується у двокомпонентні спінори безмасової частки. (Тепер ми бачимо, для чого потрібен множник  $\sqrt{m}$  у (3.47) — він зберігає скінченність спіorning виразів у безмасовій межі.)

Рішення (3.52) і (3.53) є власними станами оператора *спіральності*,

$$h \equiv \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Частка з  $h = +1/2$  називається *правополяризованою*, тоді як з  $h = -1/2$  *лівополяризованою*. Спіральність масивної частки залежить від системи відліку, бо завжди можна перейти до такої системи, де її імпульс протилежно спрямований (але спін незмінний). Для безмасової частки, що рухається зі швидкістю світла, такий перехід виконати неможливо.

Надзвичайно проста форма  $u(p)$  для безмасової частки у власному стані спіральності робить поведінку таких часток легко зрозумілою. У Розділі 1 це дозволило нам угадати вигляд перерізу розсіяння для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  у безмасовій межі. У наступних розділах ми неодноразово вдаватимемося до бездумних обчислень, після чого будемо розглядати власні стани спіральності у високоенергетичному наближенні, аби збагнути, що ми зробили.

Тепер ми вже готові зрозуміти походження позначень  $\psi_L$  і  $\psi_R$  для вейлевих спінорів. Рішеннями рівняння Вейля є стани з визначеною спіральністю, що відповідають ліво- та правополяризованим часткам. Лоренц-інваріантність спіральності (для безмасової частки) є очевидна в запису вейлевих спінорів, оскільки  $\psi_L$  і  $\psi_R$  існують у різних представленнях групи Лоренца.

Зручно записувати умову нормування для  $u(p)$  в лоренц-інваріантному вигляді. Вище ми бачили, що  $\psi^\dagger \psi$  не є інваріантним. Так само,

$$u^\dagger u = \left( \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = 2E_p \xi^\dagger \xi. \quad (3.55)$$

Для отримання лоренцового скаляра визначимо

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p) \gamma^0. \quad (3.56)$$

Відтак, провівши майже ідентичні обчислення, маємо

$$\bar{u}u = 2m \xi^\dagger \xi. \quad (3.57)$$

Це й буде нашою умовою нормування. Крім того, ми додатково вимагаємо, щоб двокомпонентний спінор  $\xi$  було нормовано звичайним чином:  $\xi^\dagger \xi = 1$ . Також зручно обрати базисні спінори  $\xi^1$  та  $\xi^2$  (на зразок  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) ортогональними. Для безмасової частки рівняння (3.57) є тривіальним, тож у цьому випадку ми маємо писати умову нормування у вигляді (3.55).

Підсумуємо результати нашого розгляду. Загальне рішення рівняння Дірака можна записати як лінійну комбінацію плоских хвиль. Позитивно-частотні хвилі мають вигляд

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (3.58)$$

Існують два лінійно незалежні рішення для  $u(p)$ :

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (3.59)$$

які ми нормуємо відповідно до

$$\bar{u}^r(p) u^s(p) = 2m \delta^{rs} \quad \text{або} \quad u^{r\dagger}(p) u^s(p) = 2E_p \delta^{rs}. \quad (3.60)$$

Таким самим чином можемо знайти негативно-частотні рішення:

$$\psi(x) = v(p) e^{ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (3.61)$$

(Зазначимо, що ми обрали за краще поставити знак плюс в експоненті, ніж допустити від'ємне значення  $p^0$ .) Існують два лінійно незалежні рішення для  $v(p)$ :

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (3.62)$$

де  $\eta^s$  є іншим базисом двокомпонентних спінорів. Ці рішення нормуємо згідно з

$$\bar{v}^r(p) v^s(p) = -2m \delta^{rs} \quad \text{або} \quad v^{r\dagger}(p) v^s(p) = +2E_p \delta^{rs}. \quad (3.63)$$

Спінори  $u$  і  $v$  також взаємно ортогональні:

$$\bar{u}^r(p) v^s(p) = \bar{v}^r(p) u^s(p) = 0. \quad (3.64)$$

Будьте пильні, оскільки  $u^{r\dagger}(p) v^s(p) \neq 0$  і  $v^{r\dagger}(p) u^s(p) \neq 0$ . Проте зазначимо, що

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p}) v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(\mathbf{p}) u^s(-\mathbf{p}) = 0, \quad (3.65)$$

де ми змінили знак 3-імпульсу в одному з множників у кожному спінорному добутку.

### Спінові суми

При розрахунках фейнманових діаграм у нас часто виникатиме потреба взяти суму за станами поляризації ферміонів. Шляхом простих обчислень можемо отримати необхідне для цього співвідношення повноти:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \sum_s \left( \frac{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s}{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s} \right) \left( \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m & p \cdot \bar{\sigma} \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

У другому рядку ми використали тотожність

$$\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо бажану формулу:

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m. \quad (3.66)$$

Таким самим чином,

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m. \quad (3.67)$$

Комбінація  $\gamma \cdot p$  зустрічається так часто, що Фейнман ввів позначення:  $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ . Відтепер ми часто вживатимемо цей запис.

### § 3.3. Матриці Дірака та білінійні форми діракового поля

Ми бачили в § 3.2, що величина  $\bar{\psi}\psi$  є лоренцовим скаляром. Також легко показати, що  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  є 4-вектором — ми скористалися з цього факту, коли отримували вираз для діракового лагранжіана (3.34). А зараз розглянемо форму  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ , де  $\Gamma$  — деяка  $4 \times 4$  постійна матриця, і задамося загальнішим питанням: чи можемо ми розкласти цей вираз на доданки, що мають певні трансформаційні властивості щодо групи Лоренца? Відповідь буде ствердною, якщо запишемо матрицю  $\Gamma$  через шістнадцять базисних  $4 \times 4$  матриць, визначених як антисиметричні комбінації  $\gamma$ -матриць:

1	1 матриця
$\gamma^\mu$	4 матриці
$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} \equiv -i\sigma^{\mu\nu}$	6 матриць
$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$	4 матриці
$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}$	1 матриця
	<u>16 загалом</u>

Трансформаційні властивості цих матриць досить легко встановити. Наприклад,

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi &\rightarrow (\bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}) \left( \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) (\bar{\psi} \Lambda_{\frac{1}{2}}) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \left( \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\nu \Lambda_{\frac{1}{2}} - \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\nu \Lambda_{\frac{1}{2}} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} \right) \psi = \\ &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \bar{\psi} \gamma^{\alpha\beta} \psi.\end{aligned}$$

Кожен набір матриць перетворюється як антисиметричний тензор послідовно зростаючого рангу.

Останні два набори матриць можна спростити, запровадивши додаткову гамма-матрицю

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma. \quad (3.68)$$

Тоді  $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5$  і  $\gamma^{\mu\nu\rho} = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5$ . Матриця  $\gamma^5$  має наступні властивості, що їх можна перевірити, скориставшись тотожністю (3.68) і антикомутаційними співвідношеннями (3.22):

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5; \quad (3.69)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1; \quad (3.70)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (3.71)$$

З останньої властивості випливає, що  $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$ . Отже, представлення Дірака має бути привідним, бо власні вектори матриці  $\gamma^5$  з різними власними значеннями перетворюються без змішування (цей критерій привідності відомий як лема Шура). У нашому базисі,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

у блочно-діагональній формі. Тобто, діраковий спінор, що має лише ліво- (право-) поляризований компонент, є власним станом  $\gamma^5$  з власним значенням  $-1$  ( $+1$ ). І справді, ці спінори перетворюються без змішування, як ми явно показали в § 3.2.

А тепер перепишемо нашу таблицю  $4 \times 4$  матриць, запровадивши стандартну термінологію:

1	скаляр	1
$\gamma^\mu$	вектор	4
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	тензор	6
$\gamma^\mu \gamma^5$	псевдовектор	4
$\gamma^5$	псевдоскаляр	$\frac{1}{16}$

Терміни *псевдовектор* і *псевдоскаляр* позначають величини, що поведуться відповідно як вектори та скаляри при безперервних перетвореннях Лоренца, але змінюють знак при дискретних перетвореннях парності (це ми розглянемо в § 3.6).

За допомогою векторних і псевдовекторних матриць можемо утворити два струми з білінійних форм діракового поля:

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x); \quad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x). \quad (3.73)$$

Обчислимо дивергенції цих струмів, виходячи з того, що  $\psi$  задовольняє рівнянню Дірака:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im\psi) = 0. \quad (3.74)$$

Отже,  $j^\mu$  завжди зберігається, якщо  $\psi(x)$  є рішенням рівняння Дірака. Коли ми поєднуємо діракове поле з електромагнітним,  $j^\mu$  стає питомим електричним струмом. Таким самим чином можна обчислити

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2 im \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (3.75)$$

При  $t = 0$  цей струм (його часто називають *аксіальним векторним струмом*) також зберігається. В цьому разі корисно утворити лінійні комбінації

$$j_L^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi, \quad j_R^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi. \quad (3.76)$$

Коли  $t = 0$ , це є питомі електричні струми ліво- та правополяризованих часток відповідно, і вони зберігаються окремо.

Два струми  $j^\mu$  та  $j^{\mu 5}$  є нотеровими струмами, що відповідають двом перетворенням

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x), \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi(x).$$

Перше з них є симетрією діракового лагранжіана (3.34). Друге називається *кіральним перетворенням* і є симетрією диференційного (кінетичного) члена в  $\mathcal{L}$  — але не масового члена; отже, теорема Нотер підтверджує, що аксіальний векторний струм зберігається лише при  $t = 0$ .



Добуток діракових білінійних форм задовольняють співвідношенням, відомим як *тотожності Фірца*. Ми обговоримо лише найпростішу з них, яку кілька разів будемо застосовувати в нашому курсі. Цю тотожність найлегше записати в термінах двокомпонентних вейлевих спіновів, запроваджених у (3.36).

Основа співвідношення — тотожність для  $2 \times 2$  матриць  $\sigma^\mu$ , визначених у (3.41):

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}. \quad (3.77)$$

Для розуміння цього співвідношення треба зазначити, що індекси  $\alpha, \gamma$  перетворюються за лоренцовим представленням  $\psi_L$ , тоді як  $\beta, \delta$  перетворюються за окремим представленням  $\psi_R$ , а вся величина має бути лоренц-інваріантною. Альтернативно, можна в явному вигляді перевірити всі 16 компонентів рівняння (3.77).

Обкладаючи тотожність (3.77) з обох боків правополяризованими частинами (тобто нижніми половинами) діракових спіновів  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , маємо

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1R\alpha}\bar{u}_{3R\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2R\beta}u_{4R\delta} = \\ &= -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R}) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Це нетривіальне співвідношення стверджує, що добуток білінійних форм у (3.78) є антисиметричним при перестановках індексів 2 і 4, а також 1 і 3. Тотожність (3.77) справедлива і для  $\bar{\sigma}^\mu$ , тому ми знаходимо

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}) = -(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{3L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{2L}). \quad (3.79)$$

Іноді корисно об'єднати тотожність Фірца (3.78) зі співвідношенням між  $\sigma^\mu$  та  $\bar{\sigma}^\mu$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\gamma} = (\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}. \quad (3.80)$$

Останній вираз також перевіряється в явному вигляді. Застосувавши (3.80), (3.79) і співвідношення

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma_\mu = 4, \quad (3.81)$$

можемо, наприклад, спростити жахливі добутки білінійних форм на зразок

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{4L}) &= \\ &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= 2 \cdot (4)^2 \cdot \varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}u_{4L\delta} = \\ &= 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Існують також тотожності Фірца для перестановок 4-компонентних діракових спінових і  $4 \times 4$  матриць Дірака. Проте для їх отримання краще скористатися систематичнішим підходом. У Задачі 3.6 представлено загальний метод і деякі приклади його застосування.

### § 3.4. Квантування діракового поля

Тепер ми вже готові до побудови квантової теорії вільного діракового поля. З лагранжіана

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (3.83)$$

бачимо, що канонічний імпульс, спряжений до  $\psi$ , є  $i\psi^\dagger$ , а отже, гамільтоніан

$$H = \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger (-i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m\gamma^0) \psi. \quad (3.84)$$

Якщо ми визначимо  $\alpha = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$ ,  $\beta = \gamma^0$ , то величину в дужках можемо інтерпретувати як гамільтоніан Дірака в одночастковій квантовій механіці:

$$h_D = -i\alpha \cdot \nabla + m\beta. \quad (3.85)$$

#### Як не треба квантувати діракове поле: урок зі спіну й статистики

Щоб проквантувати діракове поле за аналогією з полем Кляйна–Гордона, ми мусили б накласти канонічні комутаційні співвідношення

$$[\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab} \quad (\text{однаковий час}), \quad (3.86)$$

де  $a$  і  $b$  позначають компоненти спінора  $\psi$ . Це вже доволі дивно, бо якби  $\psi(x)$  було дійсним, то ліва сторона рівняння змінювала б знак при заміні  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$ , тоді як права сторона симетрична щодо такої перестановки. Але оскільки спіновий  $\psi(x)$  комплексний, ми поки не маємо протиріч. Насправді ж ми скоро переконаємося, що комутаційні співвідношення, накладені нами на діракове поле, породжують і значно серйозніші проблеми. Проте буде повчально подивитись, як далеко ми зможемо зайти — це дозволить нам краще зрозуміти зв'язок між спіном і статистикою. Отож продовжимо; але пам'ятайте, що наступні кілька сторінок зрештою заведуть нас у безвихідь.

Наша перша задача — знайти представлення комутаційних співвідношень у термінах операторів народження та знищення, яке діагоналізує  $H$ .

З вигляду гамільтоніана (3.84) ясно, що буде корисно розкласти  $\psi(x)$  за базисом власних функцій  $h_D$ . Ми вже знаємо ці власні функції з обчислень у § 3.3. Там ми виявили, що

$$[i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m] u^s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = 0,$$

тож  $u^s(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  є власними функціями  $h_D$  з власними значеннями  $E_{\mathbf{p}}$ . Так само  $v^s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  (або, еквівалентно,  $v^s(-\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$ ) є власними функціями  $h_D$  з власними значеннями  $-E_{\mathbf{p}}$ . Вони утворюють повний набір власних функцій, бо для будь-якого  $\mathbf{p}$  існують два спінори  $u$  і два спінори  $v$ , що дають нам чотири власні вектори  $4 \times 4$  матриці  $h_D$ .

Розклавши  $\psi$  за цим базисом, отримуємо

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \sum_{s=1,2} [\alpha_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^s v^s(-\mathbf{p})], \quad (3.87)$$

де  $\alpha_{\mathbf{p}}^s$  і  $b_{\mathbf{p}}^s$  є операторними коефіцієнтами. (Поки ми працюємо в картині Шродінгера, де  $\psi$  не залежить від часу.) Постулюємо комутаційні співвідношення

$$[\alpha_{\mathbf{p}}^r, \alpha_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = [b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs}. \quad (3.88)$$

Тоді легко перевірити справедливість (3.86) для  $\psi$  і  $\psi^\dagger$ :

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} \cdot 2E_{\mathbf{q}}}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} \times \\ &\quad \times \sum_{r,s} ([\alpha_{\mathbf{p}}^r, \alpha_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] u^r(\mathbf{p}) \bar{u}^s(\mathbf{q}) + [b_{-\mathbf{p}}^r, b_{-\mathbf{q}}^{s\dagger}] v^r(-\mathbf{p}) \bar{v}^s(-\mathbf{q})) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \times \\ &\quad \times [(\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) + (\gamma^0 E_{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m)] \gamma^0 = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times 1_{4 \times 4}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

На другому кроці ми використали співвідношення повноти (3.66) і (3.67) для спінових сум.

Тепер ми готові записати  $H$  у термінах  $\alpha$  і  $b$ . Після ще одного короткого обчислення (використавши співвідношення ортогональності (3.60), (3.63) і (3.65)) знаходимо

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (3.90)$$

У другому члені закралась якась жаклива помилка: породжуючи дедалі більше часток через  $b^\dagger$  ми можемо зменшувати енергію до нескінченності. (Заміна  $b \leftrightarrow b^\dagger$  не допомогла б, оскільки це зруйнувало б комутаційні співвідношення (3.89).)

Здається, ми наразилися на досить серйозну проблему, проте спробуймо піти ще далі й дослідити причинність у цій теорії. Для цього належить обчислити  $[\psi(x), \psi^\dagger(x)]$  (або, що зручніше,  $[\psi(x), \bar{\psi}(x)]$ ) у різні моменти часу і сподіватися отримати нуль поза межами світлового конуса. Найперше маємо перейти до картини Гайзенберга і відновити залежність від часу  $\psi$  та  $\bar{\psi}$ . Скориставшись співвідношенням

$$e^{iHt} a_p^s e^{-iHt} = a_p^s e^{-iE_p t}, \quad e^{iHt} b_p^s e^{-iHt} = b_p^s e^{+iE_p t}, \quad (3.91)$$

негайно отримуємо

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^s v^s(p) e^{ip \cdot x}); \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + b_p^{s\dagger} \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x}). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Тепер ми можемо обчислити загальний комутатор:

$$\begin{aligned} [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \times \\ &\quad \times \sum_s (u_a^s(p) \bar{u}_b^s(p) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_a^s(p) \bar{v}_b^s(p) e^{ip \cdot (x-y)}) = \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \times \\ &\quad \times ((\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} + (\not{p} - m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)}) = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} [\phi(x), \phi(y)]. \end{aligned}$$

Оскільки  $[\phi(x), \phi(y)]$  (комутатор дійсного поля Кляйна–Гордона) поза світловим конусом дорівнює нулю, ця величина також нульова.

Проте таке розв'язання проблеми причинності видається підозрілим. Нехай  $|0\rangle$  є станом що знищується всіма  $a_p^s$  і  $b_p^s$ , тобто:  $a_p^s |0\rangle = b_p^s |0\rangle = 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] &= \langle 0 | [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle, \end{aligned}$$

так само, як для поля Кляйна–Гордона. Але там ми мали внески від двох частин комутатора: поза світловим конусом розповсюдження частки від  $x$  до  $y$  скорочувалося розповсюдженням античастки від  $x$  до  $y$ . А тут обидва внески дає перша частина комутатора  $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ , тоді як друга тотожно нульова. Взаємно скорочуються частки з позитивною та негативною енергією, причому обидві розповсюджуються від  $x$  до  $y$ .

Це спостереження фактично вказує нам шлях до розв'язання проблеми негативної енергії. Одне з наших припущень, зроблених при квантуванні теорії Дірака, має бути хибним. Тому забудьмо постульовані нами комутаційні співвідношення (3.86) та (3.88) і погляньмо, яким чином можна забезпечити розповсюдження часток з позитивною енергією в обох напрямках. Також ми маємо відмовитися від нашого визначення вакууму  $|0\rangle$  як стану, що знищується всіма  $a_p$  і  $b_p$ . Проте збережемо вирази (3.92) для  $\psi(x)$  та  $\bar{\psi}(x)$ , як операторів Гайзенберга, оскільки  $\psi(x)$  та  $\bar{\psi}(x)$ , як рішення рівняння Дірака, мають розкладатися за такими полоско-хвильовими рішеннями.

Передовсім розглянемо амплітуду  $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ , яка має представляти частку з позитивною енергією, що розповсюджується від  $x$  до  $y$ . У цьому випадку ми б хотіли, щоб стан  $\bar{\psi}(y)|0\rangle$  (у картині Гайзенберга) був лінійною комбінацією станів лише з позитивною або лише з негативною енергією (оскільки гайзенбергів стан  $\Psi_H = e^{+iHt}\Psi_S$ ). Отже, ненульовий внесок у  $\bar{\psi}(y)|0\rangle$  можуть робити лише члени з  $a_p^\dagger$ , а це означає, що  $b_p^{s\dagger}$  мають знищувати вакуум. Відповідно,  $\langle 0|\psi(x)$  може містити лише позитивно-частотні компоненти. Звідси маємо

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r a_p^r u^r(p) e^{-ip\cdot x} \times \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_r a_q^{r\dagger} \bar{u}^r(q) e^{iq\cdot y} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Ми можемо дещо сказати про матричні елементи  $\langle 0|a_p^r a_q^{s\dagger}|0\rangle$ , навіть не знаючи, як переставляються  $a_p^r$  і  $a_q^{s\dagger}$ , а лише на підставі трансляційної та обертальної інваріантності. Якщо основний стан  $|0\rangle$  інваріантний до трансляцій, то  $|0\rangle = e^{iP\cdot x}|0\rangle$ . Крім того, оскільки  $a_q^{s\dagger}$  породжує імпульс  $\mathbf{q}$ , можна скористатися рівняннями (2.48):

$$\begin{aligned} \langle 0|a_p^r a_q^{s\dagger}|0\rangle &= \langle 0|a_p^r a_q^{s\dagger} e^{iP\cdot x}|0\rangle = \\ &= e^{i(p-q)\cdot x} \langle 0|e^{iP\cdot x} a_p^r a_q^{s\dagger}|0\rangle = \\ &= e^{i(p-q)\cdot x} \langle 0|a_p^r a_q^{s\dagger}|0\rangle. \end{aligned}$$

А отже,  $\langle 0|a_p^r a_q^{s\dagger}|0\rangle$  не дорівнює нулю, лише тоді, коли  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ . Так само можна показати, що з обертальної інваріантності  $|0\rangle$  впливає  $r = s$ . (Це має

бути зрозуміло інтуїтивно і може бути перевірено після вивчення оператора моменту імпульсу далі в цьому параграфі.) З цих міркувань робимо висновок, що матричний елемент можна записати у вигляді

$$\langle 0 | a_p^r a_q^{s\dagger} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \cdot A(\mathbf{p}),$$

де  $A(\mathbf{p})$  поки не визначено. Зауважимо, що за умови позитивності норми стану (а це одна з обов'язкових властивостей будь-якого гільбертового простору)  $A(\mathbf{p})$  має бути більшою від нуля. Тепер ми можемо повернутися до (3.93) і записати

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) A(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-y)} = \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s (\not{p} + m) A(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-y)}. \end{aligned}$$

Цей вираз інваріантний лише тоді, коли  $A(\mathbf{p})$  є лоренцовим скаляром, тобто  $A(\mathbf{p}) = A(p^2)$ . А позаяк  $p^2 = m^2$ , то  $A(\mathbf{p})$  має бути константою. У кінцевому підсумку одержимо

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial} + m)_{ab} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \cdot A. \quad (3.94)$$

Так само в амплітуді  $\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle$  ми хочемо мати лише внески позитивно-частотних членів з  $\bar{\psi}(y)$  і негативно-частотних з  $\psi(x)$ . Отже,  $a_p^s$  усе ще знищує вакуум, а от  $b_p^s$  уже ні. Виходячи з аргументів, ідентичних вищеведеним, маємо

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = -(i\not{\partial} + m)_{ab} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} \cdot B, \quad (3.95)$$

де  $B$  є іншою позитивною константою. Знак мінус тут важливий — він походить зі співвідношення повноти (3.67) для  $\sum v \bar{v}$  та знаку при  $x$  в експоненті. А це означає, що ми не зможемо отримати  $\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = 0$  поза світловим конусом, бо два члени (3.94) та (3.95) скоротилися б лише за умови  $A = -B$ , але це неможливо, оскільки і  $A$ , і  $B$  мають бути позитивними.

Тепер розв'язання проблеми майже в наших руках. Встановивши  $A = B = 1$ , легко отримати (поза межами світлового конуса):

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = -\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle.$$

Отже, спінові поля, розділені простороподібним інтервалом, *антикомутують* між собою. Цього достатньо для збереження причинності, оскільки всі

прийнятні спостережні величини (на зразок енергії, заряду і числа часток) побудовані з *парної* комбінації спінових полів, а для будь-яких спостережних такого типу  $\mathcal{O}_1$  і  $\mathcal{O}_2$  ми все ще маємо  $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$  при  $(x - y)^2 < 0$ .

Примітно, що постулюванням *антикомутаційних* співвідношень для діракового поля ми водночас розв'язуємо проблему негативної енергії. Рівночасові антикомутаційні співвідношення матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab}; \\ \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} &= \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Ми можемо розкласти  $\psi(\mathbf{x})$  за  $a_{\mathbf{p}}^s$  і  $b_{\mathbf{p}}^s$ , як і раніше (рівняння (3.87)). Оператори народження і знищення мають задовольняти умовам

$$\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \quad (3.97)$$

(решта антикомутаторів дорівнюють нулю), щоб виконувались співвідношення (3.96). Наступне обчислення дає гамільтоніан

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s),$$

такий самий, як і раніше;  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  все ще народжують стани з негативною енергією. Проте співвідношення  $\{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs}$  є симетричним щодо  $b_{\mathbf{p}}^s$  і  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ . Тому просто перевизначимо:

$$\tilde{b}_{\mathbf{p}}^s \equiv b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}; \quad \tilde{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \equiv b_{\mathbf{p}}^s. \quad (3.98)$$

Зрозуміло, що нові оператори задовольняють таким самим антикомутаційним співвідношенням, але тепер другий член у гамільтоніані є

$$-E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s = +E_{\mathbf{p}} \tilde{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \tilde{b}_{\mathbf{p}}^s - (\text{const}).$$

Якщо вибрати  $|0\rangle$  як стан, що знищується операторами  $a_{\mathbf{p}}^s$  і  $\tilde{b}_{\mathbf{p}}^s$ , то всі збудження  $|0\rangle$  мають позитивну енергію.

Що ж сталося? Для кращого розуміння цього прийому, відмовимось наразі від теорії поля й розглянемо теорію лише з однією парою операторів  $b$  і  $b^\dagger$ , для яких виконується  $\{b, b^\dagger\} = 1$  і  $\{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$ . Оберемо стан  $|0\rangle$  такий, що  $b|0\rangle = 0$ . Тоді  $b^\dagger|0\rangle$  є новим станом; позначимо його  $|1\rangle$ . Цей стан задовольняє умовам  $b|1\rangle = |0\rangle$  і  $b^\dagger|1\rangle = 0$ . Отже,  $b$  і  $b^\dagger$  діють у гільбертовому просторі з двох станів  $|0\rangle$  і  $|1\rangle$ . Ми могли б сказати, що  $|0\rangle$  є „порожнім“ станом, а  $b^\dagger$  „заповнює“ його. Але рівнозначно ми могли б назвати  $|1\rangle$  порожнім станом і сказати, що  $b = \tilde{b}^\dagger$  заповнює його. Ці два представлення абсолютно еквівалентні, поки не визначена певна спостережна величина, що

дозволить нам фізично розрізняти ці стани. У нашому випадку коректним є такий вибір, коли стан з нижчою енергією порожній. І задля уникнення плутанини доцільно позначити ермітовим спряженням той оператор, що породжує позитивну енергію. Саме так ми і вчинили.

Зазначимо між іншим, що оскільки  $(\tilde{b}^\dagger)^2 = 0$ , то стан не можна заповнити двічі. Загальніше, з антикомутаційних співвідношень випливає, що будь-який багаточастковий стан є антисиметричним відносно переставлення двох часток:  $a_p^\dagger a_q^\dagger |0\rangle = -a_q^\dagger a_p^\dagger |0\rangle$ . Таким чином, ми робимо висновок, що сходовим операторам, які задовольняють *антикомутаційним* співвідношенням, відповідають частки, що підкоряються статистиці *Фермі–Дірака*.

Щойно ми показали, що для забезпечення присутності у вакуумі збуджень лише з позитивною енергією ми мусимо проквантувати діракове поле з антикомутаційними співвідношеннями; за цих умов частки, пов'язані з діраковим полем, задовольняють статистиці Фермі–Дірака. Цей висновок є окремим випадком більш загального результату, вперше отриманого Паулі:<sup>10</sup> з вимог лоренц-інваріантності, позитивної енергії, позитивної норми та причинності випливає, що частки з цілим спіном підкоряються статистиці Бозе–Ейнштейна, тоді як частки з напівцілим спіном задовольняють статистиці Фермі–Дірака.

### Квантоване діракове поле

А зараз систематично підсумуємо результати квантування теорії Дірака. Передовсім очистимо наші позначення — відтепер ми писатимемо  $\tilde{b}$  (оператор, що знижує енергію стану) просто як  $b_p$ , а  $\tilde{b}^\dagger$  як  $b_p^\dagger$ . Усі вирази, що їх ми потребуватимемо в подальшій роботі, виписані нижче; а все, наведене в попередньому пункті, що їм суперечить, треба забути. Спершу напишемо польові оператори

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x}); \quad (3.99)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (b_p^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_p^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x}). \quad (3.100)$$

Оператори народження та знищення підпорядковуються антикомутаційним правилам

$$\{a_p^r, a_p^{s\dagger}\} = \{b_p^r, b_p^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^{rs}, \quad (3.101)$$

<sup>10</sup>W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940), репринт у [51]. Строгий розгляд наведено у Стрітера і Вайтмана [64].



а решта антикомутаторів дорівнюють нулю. Рівночасові антикомутаційні співвідношення для  $\psi$  і  $\psi^\dagger$  є такі

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab}; \\ \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} &= \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0.\end{aligned}\quad (3.102)$$

Вакуум  $|0\rangle$  визначається як стан, що для нього

$$a_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = 0. \quad (3.103)$$

Гамільтоніан можна записати, як

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s), \quad (3.104)$$

де ми відкинули нескінченний постійний доданок, що виникає від антикомутування  $b_{\mathbf{p}}^s$  і  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ . Звідси бачимо, що вакуум є станом з найнижчою енергією, як ми й хотіли. Оператор імпульсу є

$$\mathbf{P} = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger (-i\nabla) \psi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (3.105)$$

Отже, обидва оператори  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  і  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  народжують частки з енергією  $+E_{\mathbf{p}}$  та імпульсом  $\mathbf{p}$ . Позначимо частки, народжені  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , як *ферміони*, а народжені  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , як *антиферміони*. Одночасткові стани

$$|\mathbf{p}, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (3.106)$$

визначимо так, щоб їхній скалярний добуток

$$\langle \mathbf{p}, r | \mathbf{q}, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \quad (3.107)$$

був лоренц-інваріантним. Звідси випливає, що оператор  $U(\Lambda)$ , який здійснює перетворення Лоренца на станах гільбертового простору, є унітарним, хоча буст  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  неунітарні.

Не завадить провести перевірку на відповідність і перекоонатися, що  $U(\Lambda)$  реалізує правильне перетворення  $\psi(x)$ . Тож порахуємо:

$$\begin{aligned}U\psi(x)U^{-1} &= U \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \times \\ &\times \sum_s (a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{-ip \cdot x}) U^{-1}.\end{aligned}\quad (3.108)$$

Зосередимось на першому члені; другий обчислюється цілком аналогічно. З рівняння (3.106) випливає, що  $a_p^s$  перетворюється відповідно до

$$U(\Lambda) a_p^s U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a_{\Lambda p}^s, \quad (3.109)$$

за умови, що вісь квантування спіну паралельна до напрямку бусту або осі обертання. Щоб скористатися цим співвідношенням для обчислення (3.108), перепишемо інтеграл, як

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^s = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \cdot \sqrt{2E_p} a_p^s.$$

Другий множник перетворюється під дією  $U$  звичайним чином, а перший є лоренц-інваріантним інтегралом. Таким чином, якщо ми застосуємо (3.109) і зробимо підстановку  $\tilde{p} = \Lambda p$ , то (3.108) набуває вигляду

$$U(\Lambda) \psi(x) U^{-1}(\Lambda) = \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\tilde{p}}} \sum_s u^s(\Lambda^{-1} \tilde{p}) \sqrt{2E_{\tilde{p}}} a_{\tilde{p}}^s e^{-i\tilde{p} \cdot \Lambda x} + \dots$$

Але  $u^s(\Lambda^{-1} \tilde{p}) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} u^s(\tilde{p})$ , тому насправді ми маємо

$$\begin{aligned} U(\Lambda) \psi(x) U^{-1}(\Lambda) &= \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\tilde{p}}} \sum_s \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} u^s(\tilde{p}) a_{\tilde{p}}^s e^{-i\tilde{p} \cdot \Lambda x} + \dots = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \psi(\Lambda x). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Цей результат стверджує, що перетворене поле народжує і знищує частки в точці  $\Lambda x$ , як і належить. Проте зазначимо, що це перетворення здійснюється в іншому напрямку порівняно з (3.2), де перетворене поле  $\phi$  було обчислено в  $\Lambda^{-1}x$ . Різниця в тому, що в § 3.1 ми розглядали перетворення попередньо існуючого розподілу поля, що вимірювалося функцією  $\phi(x)$ . А тут ми перетворюємо дію поля  $\psi(x)$  при народженні або знищенні часток. Ці два способи реалізації перетворення Лоренца працюють у протилежних напрямках. Зауважимо, однак, що матриці, які діють на  $\psi$ , і перетворення координати  $x$  мають правильну відносну орієнтацію, узгоджену з (3.8).

Далі розглянемо спін діракової частки. Ми припускали, що діракові ферміони мають спін  $1/2$ ; тепер можемо вивести це з нашого формалізму. Як ми вже показали, частки, народжені операторами  $a_p^{s\dagger}$  і  $b_p^{s\dagger}$ , мають два „спінові“ стани:  $s = 1, 2$ . Проте ми ще не довели, що цей „спін“ має бодай якийсь стосунок до моменту імпульсу. Для цього мусимо отримати вираз для оператора моменту імпульсу.

Нагадаємо, що ми знайшли оператор лінійного імпульсу в § 2.2, розглядаючи збережену величину, пов'язану з трансляційною інваріантністю. Оператор моменту імпульсу можемо знайти схожим чином, як наслідок обертальної інваріантності. При обертанні (або будь-якому іншому перетворенні Лоренца) діракове поле  $\psi$  перетворюється (за нашим початковим визначенням), як

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x).$$

Для застосування теореми Нотер маємо обчислити зміну поля у фіксованій точці, тобто

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x).$$

Розглянемо для визначеності інфінітезимальне обертання координат на кут  $\theta$  довкола осі  $z$ . Параметризація цього перетворення наведена відразу після рівняння (3.19):  $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ . Підставивши ці параметри в (3.30), знаходимо

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2} \theta \Sigma^3$$

Тепер можемо обчислити

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= \left(1 - \frac{i}{2} \theta \Sigma^3\right) \psi(t, x + \theta y, y - \theta x, z) - \psi(x) = \\ &= -\theta \left(x \partial_y - y \partial_x + \frac{i}{2} \Sigma^3\right) \psi(x) \equiv \theta \zeta. \end{aligned}$$

Часовий компонент збереженого нотерівського струму має вигляд<sup>11</sup>

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \zeta = -i \bar{\psi} \gamma^0 \left(x \partial_y - y \partial_x + \frac{i}{2} \Sigma^3\right) \psi.$$

Подібні вирази мають місце для обертань довкола осей  $x$  і  $y$ , тож оператор моменту імпульсу є

$$\mathbf{J} = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \left(\mathbf{x} \times (-i\nabla) + \frac{1}{2} \Sigma\right) \psi. \quad (3.111)$$

Для нерелятивістських ферміонів перший доданок у (3.111) дає орбітальний момент імпульсу. Отже, другий доданок відповідає спіновому моменту імпульсу. На жаль, поділ у (3.111) на спінову й орбітальну частини не такий явний у релятивістському випадку, тому досить складно написати загальний вираз для цієї величини через сходові оператори.

<sup>11</sup> Як у випадку з трансляціями (див. стор. 27), ми маємо не один, а кілька окремо збережених струмів. Цього разу вже шість — для трьох просторових обертань та трьох бустів, і в результаті утворюється тензор третього рангу, антисиметричний за другим і третім індексами. Для побудови оператора моменту імпульсу беруться компоненти 012, 023 та 031 цього тензора. (Прим. перекл.)

А проте, для доведення факту, що діракова частка має спін  $1/2$ , досить розглянути частки у стані спокою. В цьому разі орбітальний доданок у (3.111) не дає внеску, і ми можемо легко отримати спіновий член у термінах сходових операторів. Найпростіше взяти вираз (3.99) для  $\psi$  і записати його в картині Шродінгера ( $\psi(\mathbf{x}) = \psi(0, \mathbf{x})$ ):

$$J_z^{\text{спін}} = \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} \cdot 2E_{\mathbf{p}'}}} e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \times \\ \times \sum_{r,r'} \left( a_{\mathbf{p}'}^{r'\dagger} u^{r'\dagger}(\mathbf{p}') + b_{-\mathbf{p}'}^{r'} v^{r'\dagger}(-\mathbf{p}') \right) \frac{\Sigma^3}{2} \left( a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(-\mathbf{p}) \right).$$

Ми хотіли б застосувати цей оператор до одночасткового стану з нульовим імпульсом  $a_0^{s\dagger}|0\rangle$ . Найлегше це зробити, вдавшись до наступного прийому.  $J$  має нульове значення на вакуумі (за відсутності часток момент імпульсу є нуль), тому  $J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = [J_z, a_0^{s\dagger}]|0\rangle$ . А оскільки для частки в стані спокою орбітальний член у  $J_z$  не дає внеску, то цей вираз можна переписати як  $J_z^{\text{спін}} a_0^{s\dagger}|0\rangle = [J_z^{\text{спін}}, a_0^{s\dagger}]|0\rangle$ . Єдиний ненульовий доданок в останній величині має структуру  $[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}'}^{r'}, a_0^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}) a_0^r \delta^{r's}$ ; інші три члени або обертаються на нуль, або знищують вакуум. Отож, знаходимо

$$J_z^{\text{спін}} a_0^{s\dagger}|0\rangle = \frac{1}{2m} \sum_r \left( u^{s\dagger}(0) \frac{\Sigma^3}{2} u^r(0) \right) a_0^{r\dagger}|0\rangle = \sum_r \left( \xi^{s\dagger} \frac{\sigma^3}{2} \xi^r \right) a_0^{r\dagger}|0\rangle,$$

де ми використали явну форму (3.47) для  $u(0)$ , щоб отримати останній вираз. Суму за індексом  $r$  найлегше взяти, обравши спінори  $\xi^r$  як власні стани  $\sigma^3$ . Тоді знаходимо, що для  $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  одночастковий стан є власним станом  $J_z$  з власним значенням  $+1/2$ , а для  $\xi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  він є власним станом  $J_z$  з власним значенням  $-1/2$ . Це саме той результат, якого ми й очікували для електронів.

Аналогічно визначається спін антиферміона з нульовим імпульсом. Але в цьому разі, оскільки порядок членів з  $b$  і  $b^\dagger$  у  $J_z$  є зворотній, ми отримуємо додатковий знак мінус при обчисленні  $[b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}'}^\dagger, b_0^\dagger] = [-b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}, b_0^\dagger]$ . Тож для позитронів зв'язок між спінорами  $\eta^s$  та спіновим моментом імпульсу протилежний:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  відповідає спіну  $-1/2$ , тоді як  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  відповідає спіну  $+1/2$ . Це обернення знаку узгоджується з передбаченням діракової теорії дірок. З цього погляду позитрон є відсутнім електроном з негативною енергією. Якщо зниклий електрон мав позитивне значення  $J_z$ , то його відсутність має негативне значення  $J_z$ .

У підсумку, момент імпульсу ферміонів у стані спокою дається виразом

$$J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = \pm \frac{1}{2} a_0^{s\dagger}|0\rangle, \quad J_z b_0^{s\dagger}|0\rangle = \mp \frac{1}{2} b_0^{s\dagger}|0\rangle \quad (3.112)$$

де верхній знак призначений для  $\xi^s, \eta^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а нижній — для  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

В теорії Дірака є ще одна вельми важлива збережена величина. У § 3.4 ми бачили, що струм  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  зберігається. Заряд, асоційований з цим струмом, є

$$Q = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{-\mathbf{p}}^s b_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}),$$

або, якщо ми проігноруємо ще одну нескінченну константу,

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (3.113)$$

Отже,  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  народжують ферміони з зарядом  $+1$ , тоді як  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  народжують антиферміони з зарядом  $-1$ . Коли ми поєднаємо діракове поле з електромагнітним, то побачимо, що  $Q$  є не що інше, як електричний заряд (з точністю до постійного множника, що залежить від типу частки, яку ми хочемо описати; наприклад, для електронів електричний заряд є  $eQ$ ).

У квантовій електродинаміці ми використовуватимемо спінорне поле  $\psi$  для опису електронів та позитронів. Частки, народжені  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , є електронами; вони мають енергію  $E_{\mathbf{p}}$ , імпульс  $\mathbf{p}$ , спіні  $1/2$  з поляризацією, що відповідає  $\xi^s$ , і заряд  $+1$  (в одиницях  $e$ ). Частки, народжені  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , є позитронами; вони мають енергію  $E_{\mathbf{p}}$ , імпульс  $\mathbf{p}$ , спіні  $1/2$  з поляризацією, протилежною до  $\xi^s$ , і заряд  $-1$ . Стан  $\psi_a(x)|0\rangle$  містить позитрон у положенні  $x$ , чия поляризація відповідає обраному компонентові спінора. Так само,  $\bar{\psi}_a(x)|0\rangle$  є станом одного електрона в положенні  $x$ .

## Пропагатор Дірака

Обчислення амплітуди розповсюдження для діракового поля тепер стає простою справою:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u_a^s(p) \bar{u}_b^s(p) e^{-ip \cdot (x-y)} = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s v_a^s(p) \bar{v}_b^s(p) e^{-ip \cdot (y-x)} = \\ &= -(i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (y-x)}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Так само, як ми це робили для рівняння Кляйна–Гордона, можемо побудувати для рівняння Дірака функцію Гріна, що задовольнятиме різним граничним умовам. Наприклад, запізніла функція Гріна є

$$S_R^{ab}(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_b(y) \} | 0 \rangle. \quad (3.116)$$

Легко перевірити, що

$$S_R(x-y) = (i\cancel{\partial}_x + m) D_R(x-y), \quad (3.117)$$

оскільки у правій частині член, що містить  $\partial_0 \theta(x^0 - y^0)$ , обертається на нуль. Використавши (3.117) і той факт, що  $\cancel{\partial}\cancel{\partial} = \partial^2$ , ми бачимо, що  $S_R$  є функцією Гріна оператора Дірака:

$$(i\cancel{\partial}_x - m) S_R(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y) \cdot \mathbf{1}_{4 \times 4}. \quad (3.118)$$

Функцію Гріна оператора Дірака також можна отримати з перетворення Фур'є. Розклавши  $S_R(x-y)$  в інтеграл Фур'є і подіявши з обох сторін оператором  $(i\cancel{\partial}_x - m)$ , знаходимо

$$i\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\cancel{p} - m) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{S}_R(p), \quad (3.119)$$

а, отже,

$$\tilde{S}_R(p) = \frac{i}{\cancel{p} - m} = \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2}. \quad (3.120)$$

Для отримання запізнілої функції Гріна ми маємо обчислити інтеграл по  $p^0$  у (3.120) вздовж контуру, зображеного на стор 39. Для  $x^0 > y^0$  замикаємо контур знизу, охопивши обидва полюси, і в результаті отримуємо суму (3.115) та (3.114). Для  $x^0 < y^0$  замикаємо контур згори і отримуємо нуль.

Функція Гріна з граничними умовами Фейнмана визначається контуром, зображеним на сторінці 40:

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \\ &= \begin{cases} +\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{для } x^0 > y^0 \text{ (контур згори)} \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{для } x^0 < y^0 \text{ (контур знизу)} \end{cases} \equiv \\ &\equiv \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.121)$$

де ми визначили хронологічний добуток спінових полів з додатковою змінною знаком при перестановці операторів. Цей знак мінус надзвичайно важливий у квантовій теорії поля ферміонів; ми знову зустрінемося з цим у § 4.7.

Як і в теорії Кляйна–Гордона, вираз (3.121) для фейнманового пропагатора є найкориснішим результатом цього розділу. Коли ми проводимо пертурбативні обчислення за фейнмановими діаграмами, то ставимо у відповідність множник  $\tilde{S}_F(p)$  кожній внутрішній ферміонній лінії.

### § 3.5. Дискретні симетрії в теорії Дірака

В останньому параграфі ми розглянули реалізацію безперервних перетворень Лоренца на гільбертовому просторі в теорії Дірака. Ми виявили, що для кожного перетворення  $\Lambda$  існує унітарний оператор  $U(\Lambda)$ , який здійснює коректне перетворення полів:

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \psi(\Lambda x). \quad (3.122)$$

У цьому параграфі ми розглянемо аналогічні оператори, що реалізують різні дискретні симетрії діракового поля.<sup>12</sup>

На додаток до безперервних перетворень Лоренца існують дві інші просторово-часові операції, що є потенційними симетріями лагранжіана: *парність* та *інверсія часу*. Парність, що позначається як  $P$ , переводить  $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$ , обертаючи напрям у просторі. Інверсія часу, що позначається як  $T$ , переводить  $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathbf{x})$ , переставляючи минулий і майбутній світлові конуси. Жодна з цих операцій не може бути отримана через безперервні перетворення Лоренца. Проте обидві зберігають інтервал Мінковського  $x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$ . За стандартною термінологією, безперервні перетворення Лоренца відносяться до власної ортохронної групи Лоренца, що позначається як  $L_+^\uparrow$ . Повна група Лоренца поділяється на чотири незв'язні компоненти:

$$\begin{array}{ccc} L_+^\uparrow & \xleftrightarrow{P} & L_-^\uparrow = P L_+^\uparrow \quad \text{„ортохронна“} \\ T \updownarrow & & \updownarrow T \\ L_+^\downarrow = T L_+^\uparrow & \xleftrightarrow{P} & L_-^\downarrow = P T L_+^\uparrow \quad \text{„неортохронна“} \\ \text{„власна“} & & \text{„невласна“} \end{array}$$

Разом з розглядом  $P$  і  $T$ , буде зручно розглянути і третю (не просторово-часову) дискретну операцію — *зарядове спряження*, що позначається як  $C$ . Ця операція переставляє частки та античастки.

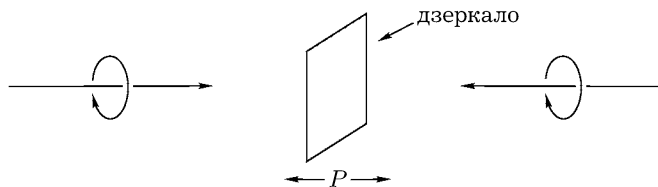
Кожна релятивістська теорія поля має бути інваріантною щодо  $L_+^\uparrow$ , проте не конче обов'язково — щодо  $P$ ,  $T$  або  $C$ . Який статус цих операцій у реальному світі? З дослідів відомо, що три сили Природи — гравітаційна, електромагнітна та сильна взаємодії — є симетричними відносно  $P$ ,  $C$  і  $T$ . Слабка взаємодія порушує симетрії  $C$  і  $P$  окремо, але зберігає  $CP$  і  $T$ . Проте деякі рідкісні процеси (всі, що досі спостерігалися, включають нейтральні  $K$ -мезони) порушують також  $CP$  і  $T$ . Всі спостереження свідчать, що комбінація  $CPT$  є точною симетрією Природи.

<sup>12</sup> При викладі цієї теми автори з педагогічних міркувань вдалися до істотних спрощень. Ґрунтовний, достатньо строгий (але цілком фізичний) розгляд дискретних симетрій у квантовій теорії поля можна знайти у Вайнберґа [61]. (Прим. перекл.)

Загальноприйнята наразі теоретична модель слабкої взаємодії, калібровочна теорія Глешоу–Вайнберга–Салама, викладена в Розділі 20 (Том III). У цій теорії  $C$  і  $P$  порушуються найжорсткішим чином. Власне, є досить несподіваним (хоча не випадковим) той факт, що  $C$  і  $P$  виявляються цілком придатними симетріями у переважній більшості процесів, які легко спостерігаються на практиці. З іншого боку, досі невідома насправді красива теорія, що порушує  $CP$ -інваріантність. У наявній теорії, де мають місце три (або більше) генерації ферміонів, присутній параметр, що в разі його відмінності від нуля призводить до порушення  $CP$ -інваріантності. Проте числове значення цього параметру зрозуміле не більше за величину маси електрона; фізичне походження порушення  $CP$  залишається загадковим. Далі ми обговоримо це питання в § 20.3.

## Парність

Після цього вступу розглянемо дію  $P$ ,  $T$  і  $C$  на діракові частки та поля. Спочатку займемося парністю. Оператор  $P$  змінює напрям імпульсу частки без зміни її спіну:



Математично це означає, що операцію  $P$  має реалізувати унітарний оператор (правильніше позначати його  $U(P)$ , але ми писатимемо просто  $P$ ), який, наприклад, перетворює стан  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$  на  $a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle$ . Іншими словами, ми хочемо, щоб

$$P a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} P = \eta_a a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} \quad \text{і} \quad P b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} P = \eta_b b_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}, \quad (3.123)$$

де  $\eta_a$  і  $\eta_b$  — можливі фази. Вони обмежені умовою, що подвійне застосування оператора парності має повертати спостережні величини до їх первісних значень. Оскільки спостережні величини побудовані з парної кількості ферміонних операторів, то ця умова вимагає, щоб  $\eta_a^2, \eta_b^2 = \pm 1$ .

Так само, як безперервне перетворення Лоренца реалізоване постійною  $4 \times 4$  матрицею  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ , перетворення парності також має бути представленим постійною  $4 \times 4$  матрицею. Щоб знайти цю матрицю й визначити  $\eta_a$  та  $\eta_b$ ,



обчислимо дію  $P$  на  $\psi(x)$ . Застосувавши (3.123), отримуємо

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \times \\ \times \sum_s (\eta_a \alpha_{-\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \eta_b^* b_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x}). \quad (3.124)$$

Тепер замінімо  $p$  на  $\tilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$ . Зазначимо, що  $p \cdot x = \tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x})$ . А також,  $\tilde{p} \cdot \sigma = p \cdot \bar{\sigma}$  і  $\tilde{p} \cdot \bar{\sigma} = p \cdot \sigma$ . Це дозволяє записати

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p}); \\ v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \eta \\ -\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \eta \end{pmatrix} = -\gamma^0 v(\tilde{p}).$$

Тоді (3.124) стає

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \times \\ \times \sum_s (\eta_a \alpha_{\tilde{p}}^s u^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x})} + \eta_b^* b_{\tilde{p}}^{s\dagger} v^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x})}).$$

Цей вираз має дорівнювати певній постійній матриці, помноженій на  $\psi(t, -\mathbf{x})$ , і це справді так, якщо ми встановимо  $\eta_b^* = -\eta_a$ . Звідси випливає

$$\eta_a \eta_b = -\eta_a \eta_a^* = -1. \quad (3.125)$$

Отже, ми отримуємо перетворення парності  $\psi(x)$  в остаточній формі:

$$P\psi(t, \mathbf{x})P = \eta_a \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}). \quad (3.126)$$

Буде важливо знати (наприклад, для написання лагранжіанів), як перетворюються під дією парності різні білінійні форми діракового поля. Нагадаємо, що є п'ять таких білінійних форм:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad i\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (3.127)$$

Множник  $i$  в деяких із них присутній для забезпечення самоспряженості, що ви можете легко перевірити. (Будь-який новий член у лагранжіані мусить бути дійсним.) Передовсім обчислимо:

$$P\bar{\psi}(t, \mathbf{x}) = P\psi^\dagger(t, \mathbf{x})P\gamma^0 = (P\psi(t, \mathbf{x})P)^\dagger \gamma^0 = \eta_a^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^0. \quad (3.128)$$

Тоді скалярна білінійна форма перетворюється, як

$$\begin{aligned} P\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})P &= |\eta_a|^2 \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^0\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = \\ &= +\bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\psi(t, -\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.129)$$

а для векторної маємо

$$\begin{aligned} P\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t, \mathbf{x})P &= \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = \\ &= \begin{cases} +\bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t, -\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0, \\ -\bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t, -\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Зауважимо, що цей вектор набуває того ж знаку мінус при просторових компонентах, що й вектор  $x^\mu$ . Так само перетворення псевдоскаляра та псевдовектора є

$$\begin{aligned} P i \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma^5 \psi(t, \mathbf{x}) P &= i \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = \\ &= -i \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^5 \psi(t, -\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, \mathbf{x}) P &= \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = \\ &= \begin{cases} -\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, -\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0, \\ +\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, -\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Як ми й попереджали в § 3.4, префікс „псевдо“ означає додатковий знак мінус при перетворенні парності. (Властивості перетворення  $i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi = 2\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$  залишено для Задачі 3.7.) Зазначимо, що трансформаційні властивості ферміонних білінійних форм не залежать від  $\eta_a$ , тому, не втрачаючи загальності, можна було від самого початку встановити  $\eta_a = -\eta_b = 1$ .

А проте, відносний знак мінус у (3.125) при перетвореннях парності ферміона й антиферміона має важливі наслідки. Розглянемо ферміон-антиферміонний стан  $a_p^{s\dagger} b_q^{s'\dagger} |0\rangle$ . Застосувавши  $P$ , знаходимо  $P(a_p^{s\dagger} b_q^{s'\dagger} |0\rangle) = -(a_{-p}^{s\dagger} b_{-q}^{s'\dagger} |0\rangle)$ . Отже, стан, що містить ферміон-антиферміонну пару, отримує додатковий множник  $(-1)$  при перетворенні парності. Ця інформація найбільш корисна для розгляду зв'язаних станів, у яких імпульси ферміона та антиферміона інтегровані зі шродінгеровою хвильовою функцією й утворюють локалізовану в просторі систему. Ми докладно вивчимо такі стани в § 5.3, а тут лише зазначимо, що для просторової хвильової функції, симетричної щодо  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ , стан є *непарним*, тоді як для антисиметричної щодо  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  функції стан є *парним*. До прикладу, зв'язаний стан з  $L = 0$  має негативну парність; стан з  $J = 0$  перетворюється, як псевдоскаляр, тим часом як три стани з  $J = 1$  перетворюються, як просторові компоненти вектора. Ці властивості виявляють себе в правилах відбору для розпадів позитронію та системи кварк-антикварк (Задача 3.8).

### Інверсія часу

Звернемось тепер до реалізації інверсії часу. Ми воліли б отримати  $T$  у формі унітарного оператора, що переводить  $a_p$  у  $a_{-p}$  (і так само для  $b_p$ ), а  $\psi(t, \mathbf{x})$  у  $\psi(-t, \mathbf{x})$  (з деяким постійним матричним множником). Утім, забезпечити такі властивості надзвичайно важко, бо вище ми вже бачили, що перетворення  $a_p$  на  $a_{-p}$ , рівнозначно перетворенню  $(t, \mathbf{x})$  на  $(t, -\mathbf{x})$  у виразі для розкладеного за сходовими операторами  $\psi$ . Складність стане ще очевиднішою, коли ми висунемо вимогу, щоб операція інверсії часу була симетрією для вільної теорії Дірака,  $[T, H] = 0$ . У цьому разі,

$$\begin{aligned}\psi(t, \mathbf{x}) &= e^{iHt} \psi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \Rightarrow \\ \Rightarrow T\psi(t, \mathbf{x})T &= e^{iHt} (T\psi(\mathbf{x})T) e^{-iHt} \Rightarrow \\ \Rightarrow T\psi(t, \mathbf{x})T|0\rangle &= e^{iHt} (T\psi(\mathbf{x})T)|0\rangle,\end{aligned}$$

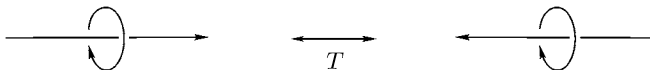
за умови, що  $H|0\rangle = 0$ . Тут права частина є сумою лише негативно-частотних членів. Та якщо  $T$  обертає часову залежність поля  $\psi(t, \mathbf{x})$ , тоді ліва частина дорівнює (з точністю до постійної матриці)  $\psi(-t, \mathbf{x})|0\rangle = e^{-iHt} \psi(\mathbf{x})|0\rangle$ , що є сумою позитивно-частотних членів. Отже, ми довели, що  $T$  не може бути реалізовано як лінійний унітарний оператор.

Що ж ми можемо зробити? Вихід полягає в тому, щоб зберегти умову унітарності  $T^\dagger = T^{-1}$ , але при цьому встановити, що  $T$  діє і на  $c$ -числа, і на оператори наступним чином:

$$T(c\text{-число}) = (c\text{-число})^* T. \quad (3.133)$$

Тоді навіть при  $[T, H] = 0$ , залежність від часу всіх експоненційних множників обертається:  $T e^{+iHt} = e^{-iHt} T$ . Оскільки вся часова еволюція у квантовій механіці здійснюється через такі експоненційні множники, це на практиці змінює знак  $t$ . Зауважимо, що операція комплексного спряження нелінійна, а  $T$  є *антилінійним* або *антиунітарним* оператором.

На додачу до зміни напрямку імпульсу частки,  $T$  також має перевертати її спіні:



Щоб виразити це в явному вигляді, ми повинні знайти математичну операцію, що перевертає спінорі  $\xi$ .

Вище ми позначали спіновий стан ферміона індексом  $s = 1, 2$ . Далі в цьому параграфі пов'язуватимемо  $s$  з фізичною проекцією спіну ферміона вздовж певної осі. Якщо ця вісь має полярні координати  $\theta, \phi$ , то двокомпо-

нентні спінори зі спіном угору і вниз уздовж цієї осі є

$$\xi(\uparrow) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi(\downarrow) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Нехай  $\xi^s = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$  для  $s = 1, 2$ . Визначимо також

$$\xi^{-s} = -i\sigma^2(\xi^s)^*. \quad (3.134)$$

Ця величина є перевернутим спінором; з явних формул маємо

$$\xi^{-s} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)). \quad (3.135)$$

Такий вираз для перевертання спіну в найзагальнішому випадку впливає з тотожності  $\sigma\sigma^2 = \sigma^2(-\sigma^*)$ . Це рівняння означає, що для спінора  $\xi$  та осі  $\mathbf{n}$ , які задовольняють умові  $\mathbf{n} \cdot \sigma \xi = +\xi$ , справедливе співвідношення

$$(\mathbf{n} \cdot \sigma)(-i\sigma^2\xi^*) = -i\sigma^2(-\mathbf{n} \cdot \sigma)^*\xi^* = i\sigma^2(\xi^*) = -(-i\sigma^2\xi^*).$$

Зауважимо, що таке визначення для перевертання спіну призводить до того, що в результаті двох послідовних операцій ми отримуємо початковий спіновий стан, помножений на  $(-1)$ .

А зараз зіставимо різні спінові стани ферміонів з цими спінорами. Оператор  $a_p^s$  знищує електрон, чий спінор  $u^s(p)$  містить  $\xi^s$ . Оператор  $b_p^s$  знищує позитрон, чий спінор  $v^s(p)$  містить  $\eta^s = \xi^{-s}$ :

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{-s} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{-s} \end{pmatrix}. \quad (3.136)$$

Як і в (3.135), визначимо

$$a_p^{-s} = (a_p^2, -a_p^1), \quad b_p^{-s} = (b_p^2, -b_p^1). \quad (3.137)$$

Тепер ми можемо отримати співвідношення між діраковими спінорами  $u$  і  $v$  та їх часовою інверсією. Визначимо  $\tilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$ . Цей вектор задовольняє тотожності  $\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \sigma^2 = \sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma^*}$ ; для доведення треба розкласти квадратний корінь як у (3.49). При певному виборі спіну та імпульсу, пов'язаних з діраковим спінором  $u^s(p)$ , нехай  $u^{-s}(\tilde{p})$  позначає спінор зі зміненим напрямком імпульсу й перевернутим спіном. Між цими величинами існує співвідношення

$$\begin{aligned} u^{-s}(\tilde{p}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} (-i\sigma^2 \xi^{s*}) \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} (-i\sigma^2 \xi^{s*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma^*} \xi^{s*} \\ -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{s*} \end{pmatrix} = \\ &= -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} [u^s(p)]^* = \gamma^1 \gamma^3 [u^s(p)]^*. \end{aligned}$$

Так само для  $v^s(p)$  маємо

$$v^{-s}(\tilde{p}) = \gamma^1 \gamma^3 [v^s(p)]^*.$$

Скориставшись рівнянням (3.137), визначимо перетворення ферміонних операторів при інверсії часу, як

$$T a_{\mathbf{p}}^s T = a_{-\mathbf{p}}^{-s}, \quad T b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} T = b_{-\mathbf{p}}^{-s\dagger}. \quad (3.138)$$

Додаткова спільна фаза ніяк не вплине на наш подальший розгляд і для простоти вилучена. Співвідношення (3.138) дають можливість обчислити дію  $T$  на ферміонне поле  $\psi(x)$ :

$$\begin{aligned} T\psi(t, \mathbf{x})T &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \times \\ &\quad \times \sum_s T(a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x}) T = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \times \\ &\quad \times \sum_s (a_{-\mathbf{p}}^{-s} [u^s(p)]^* e^{ip \cdot x} + b_{-\mathbf{p}}^{-s\dagger} [v^s(p)]^* e^{-ip \cdot x}) = \\ &= \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{\mathbf{p}}}}} (\gamma^1 \gamma^3) \times \\ &\quad \times \sum_s (a_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-s} u^{-s}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x})} + b_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-s\dagger} v^{-s}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x})}) = \\ &= \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.139)$$

На останньому кроці ми використали  $\tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x}) = -\tilde{p} \cdot (-t, \mathbf{x})$ .

Далі ми можемо перевірити дію  $T$  на різні білінійні форми. Передовсім нам знадобиться

$$\begin{aligned} T\bar{\psi}(t, \mathbf{x})T &= (T\psi(t, \mathbf{x})T)^\dagger (\gamma^0)^* = \psi^\dagger(-t, \mathbf{x}) (\gamma^1 \gamma^3)^\dagger \gamma^0 = \\ &= \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) (-\gamma^1 \gamma^3). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Тоді перетворення білінійної скалярної форми має вигляд

$$\begin{aligned} T\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})T &= \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) (-\gamma^1 \gamma^3) (\gamma^1 \gamma^3) \psi(-t, \mathbf{x}) = \\ &= +\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\psi(-t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Псевдоскаляр набуває додаткового знаку мінус при проходженні  $T$  через  $i$ :

$$\begin{aligned} Ti\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\gamma^5\psi(t, \mathbf{x})T &= -i\bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) (-\gamma^1 \gamma^3) \gamma^5 (\gamma^1 \gamma^3) \psi(-t, \mathbf{x}) = \\ &= -i\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma^5\psi(-t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Для вектора ми маємо провести окремі обчислення для кожного значення індексу  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Після деяких викладок ви отримаєте

$$\begin{aligned} T\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\gamma^\mu\psi(t, \mathbf{x})T &= \\ &= \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})(-\gamma^1\gamma^3)(\gamma^\mu)^*(\gamma^1\gamma^3)\psi(-t, \mathbf{x}) = \\ &= \begin{cases} +\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma^\mu\psi(-t, \mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0; \\ -\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma^\mu\psi(-t, \mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Це саме те перетворення, яке нам потрібне для векторів на зразок питомого струму. Ви можете перекоонатися, що псевдовектор перетворюється при інверсії часу таким самим чином.

### Зарядове спряження

Останньою з трьох дискретних симетрій є симетрія  $C$  між частками та античастками. Не виникає жодних проблем з реалізацією  $C$  як унітарного лінійного оператора. Зарядове спряження зазвичай визначають як перехід від ферміона з певною спіноюю орієнтацією до антиферміона з такою самою спіноюю орієнтацією. Тож зручним вибором для перетворення ферміонних операторів знищення є

$$C a_p^s C = b_p^s; \quad C b_p^s C = a_p^s. \quad (3.143)$$

І знову, для простоти ми ігноруємо можливі додаткові фази.

Далі ми хочемо отримати дію  $C$  на  $\psi(x)$ . Насамперед нам знадобиться співвідношення між  $v^s(p)$  та  $u^s(p)$ . Використовуючи (3.136),

$$\begin{aligned} (v^s(p))^* &= \left( \frac{\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} (-i\sigma^2 \xi^{s*})}{-\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} (-i\sigma^2 \xi^{s*})} \right)^* = \left( \frac{-i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{s*}}{i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{s*}} \right)^* = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$u^s(p) = -i\gamma^2 (v^s(p))^*, \quad v^s(p) = -i\gamma^2 (u^s(p))^*. \quad (3.144)$$

Якщо підставимо (3.144) у вираз для оператора ферміонного поля, а потім перетворимо цей оператор за допомогою  $C$ , то знайдемо

$$\begin{aligned} C\psi(x)C &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \times \\ &\times \sum_s (-i\gamma^2 b_p^s v^s(p)^* e^{-ip \cdot x} - i\gamma^2 a_p^{s\dagger} u^s(p)^* e^{ip \cdot x}) = \\ &= -i\gamma^2 \bar{\psi}(x) = -i\gamma^2 (\psi^\dagger)^T = -i(\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Зазначимо, що  $C$  є лінійним унітарним оператором, попри те, що він переводить  $\psi \rightarrow \psi^*$ .

І знов-таки, ми хотіли б знати, як  $C$  діє на білінійні форми. Спочатку нам треба отримати

$$C\bar{\psi}C = C\psi^\dagger C\gamma^0 = (-i\gamma^2\psi)^T \gamma^0 = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T. \quad (3.146)$$

Вивести перетворення для білінійних форм дещо складніше, тому варто явно виписати спірні індекси. Для скаляра,

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}\psi C &= (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T (-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = -\gamma_{ab}^0\gamma_{bc}^2\psi_c\bar{\psi}_a\gamma_{de}^0\gamma_{ea}^2 = \\ &= +\bar{\psi}_a\gamma_{ac}^0\gamma_{ca}^2\gamma_{ab}^0\gamma_{bc}^2\psi_c = -\bar{\psi}\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2\psi = \\ &= +\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (3.147)$$

(Знак мінус на третьому кроці впливає з антикомутативності ферміонів.) Для псевдоскаляра не набагато складніше:

$$Ci\bar{\psi}\gamma^5\psi C = i(-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T \gamma^5(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = i\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (3.148)$$

Для вектора і псевдовектора маємо проводити обчислення окремо для кожного їх компонента. Врахувавши, що  $\gamma^0$  і  $\gamma^2$  є симетричними матрицями, тоді як  $\gamma^1$  і  $\gamma^3$  — антисиметричними, знаходимо

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi; \quad (3.149)$$

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi C = +\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \quad (3.150)$$

Хоча оператор  $C$  переводить  $\psi$  у  $\bar{\psi}$  і навпаки, він насправді не змінює порядку операторів народження і знищення. Отже, якщо з  $\bar{\psi}\gamma^0\psi$  вже вирахована нескінченна константа, згадана перед рівнянням (3.113), то вона не з'являється знову внаслідок зарядового спряження.

### Підсумок по $C$ , $P$ і $T$

Трансформаційні властивості різних білінійних форм під дією  $C$ ,  $P$ , і  $T$  зведено в підсумковій таблиці. Тут ми використали скорочення  $(-1)^\mu \equiv 1$  для  $\mu = 0$  і  $(-1)^\mu \equiv -1$  для  $\mu = 1, 2, 3$

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\partial_\mu$
$P$	+1	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$(-1)^\mu$
$T$	+1	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu$
$C$	+1	+1	-1	+1	-1	+1
$CPT$	+1	+1	-1	-1	+1	-1

Ми включили сюди трансформаційні властивості тензорної білінійної форми (див. Задачу 3.7), а також оператора похідної.

Зазначимо, що вільний діраків лагранжіан  $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$  є інваріантним відносно кожного з перетворень  $C$ ,  $P$  і  $T$  окремо. Можна побудувати загальніші квантові системи, що порушують будь-яку з цих симетрій, додаючи до  $\mathcal{L}_0$  певне збурення  $\delta\mathcal{L}$ . Проте  $\delta\mathcal{L}$  мусить бути лоренцовим скаляром, і останній рядок таблиці вказує, що всі комбінації  $\bar{\psi}$  та  $\psi$ , які є лоренцовими скалярами, інваріантні відносно комбінованої симетрії  $CPT$ . Насправді справедливе найзагальніше твердження, що неможливо побудувати лоренц-інваріантну квантову теорію поля з самоспряженим гамільтоніаном, у якій порушено  $CPT$  симетрію.<sup>13</sup>

## Задачі

**3.1. Група Лоренца.** Нагадаємо комутаційні співвідношення (3.17) для групи Лоренца:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}).$$

**(а)** Визначимо генератори обертань і бустів як

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} \quad K^i = J^{0i},$$

де  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Тоді інфінітезимальне перетворення Лоренца можна записати, як

$$\Phi \rightarrow (1 - \theta \cdot \mathbf{L} - i\beta \cdot \mathbf{K}) \Phi.$$

Випишіть комутаційні співвідношення цих векторних операторів у явному вигляді. (Наприклад,  $[L^i, L^j] = i\varepsilon^{ijk}L^k$ .) Покажіть, що комбіновані оператори

$$\mathbf{J}_+ = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + i\mathbf{K}) \quad \text{і} \quad \mathbf{J}_- = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - i\mathbf{K})$$

комутовують між собою і кожен з них задовольняє комутаційним співвідношенням для моменту імпульсу.

**(б)** Скінченновимірні представлення групи обертань точно відповідають припустимим значенням моменту імпульсу — цілим та напівцілим числам. З результату пункту (а) випливає, що всі скінченновимірні представлення групи Лоренца відповідають парам цілих або напівцілих чисел  $(j_+, j_-)$ , пов'язаних з парами представлень групи обертань. Скориставшись з того, що  $J = \sigma/2$  у представленні моменту імпульсу зі

<sup>13</sup>Ця теорема, як і теорема про спин і статистику, строго доведена в [64].



спіном  $1/2$ , випишіть у явному вигляді закони перетворення для двокомпонентних об'єктів, які перетворюються за представленнями групи Лоренца, що відповідають парам  $(\frac{1}{2}, 0)$  і  $(0, \frac{1}{2})$ . Покажіть, що це є достоту перетворення  $\psi_L$  і  $\psi_R$ , отримані у (3.37).

- (с) Тотожність  $\sigma^T = -\sigma^2 \sigma \sigma^2$  дозволяє записати перетворення  $\psi_L$  в унітарно еквівалентному вигляді

$$\psi' \rightarrow \psi' \left( 1 + i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} + \beta \cdot \frac{\sigma}{2} \right),$$

де  $\psi' = \psi_L^T \sigma^2$ . Застосувавши це правило, ми можемо представити об'єкт, що перетворюється як  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , у формі  $2 \times 2$  матриці, яка підпорядковується законові перетворення для  $\psi_R$  зліва і водночас — законові перетворення для транспонованого  $\psi_L$  справа. Параметризуємо цю матрицю таким чином:

$$\begin{pmatrix} V^0 + iV^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - iV^3 \end{pmatrix}.$$

Покажіть, що об'єкт  $V^\mu$  перетворюється як 4-вектор.

### 3.2. Отримайте тотожність Гордона

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p).$$

де  $q = (p' - p)$ . Ми будемо використовувати цю формулу в Розділі 6.

**3.3. Спінорні добутки.** (Ця задача, разом з Задачами 5.3 і 5.6, впроваджує ефективний обчислювальний метод для процесів з безмасовими частками.) Нехай  $k_0^\mu, k_1^\mu$  — фіксовані 4-вектори, що задовольняють умовам  $k_0^2 = 0$ ,  $k_1^2 = -1$ ,  $k_0 \cdot k_1 = 0$ . Визначимо базисні спінори наступним чином. Нехай  $u_{L0}$  — лівополяризований спінор для ферміона з імпульсом  $k_0$ . Нехай  $u_{R0} = \not{k}_1 u_{L0}$ . Тоді для будь-якого  $p$ , що є світлоподібним ( $p^2 = 0$ ), визначимо

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0} \quad \text{і} \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}.$$

Ці умови визначають фази спінорів однозначно (за винятком випадку, коли  $p$  паралельний  $k_0$ ).

- (а) Покажіть, що  $\not{k}_0 u_{R0} = 0$ . Покажіть, що для будь-якого світлоподібного  $p$  виконується  $\not{p} u_L(p) = \not{p} u_R(p) = 0$ .

- (b) Для випадку  $k_0 = (E, 0, 0, -E)$ ,  $k_1 = (0, 1, 0, 0)$ , випишіть у явному вигляді  $u_{L0}$ ,  $u_{R0}$ ,  $u_L(p)$  і  $u_R(p)$ .
- (c) Визначимо *спінорні добутки*  $s(p_1, p_2)$  і  $t(p_1, p_2)$  для світлоподібних  $p_1$ ,  $p_2$  як

$$s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1)u_L(p_2), \quad t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1)u_R(p_2).$$

Використавши явний вигляд  $u_\lambda$ , заданий у (b), обчисліть явно спінорні добутки і покажіть, що  $t(p_1, p_2) = s(p_2, p_1)^*$  і  $s(p_1, p_2) = -s(p_2, p_1)$ . Крім того, покажіть, що

$$|s(p_1, p_2)|^2 = 2p_1 \cdot p_2.$$

Отже, спінорні добутки дорівнюють квадратним кореням від скалярних добутків 4-векторів.

**3.4. Майоранові ферміони.** Виходячи з (3.40), можна записати релятивістське рівняння для безмасового 2-компонентного ферміонного поля, що перетворюється як два верхніх компонента діракового спінора ( $\psi_L$ ). Позначимо таке 2-компонентне поле  $\chi_a(x)$ ,  $a = 1, 2$ .

- (a) Покажіть, що є можливість записати рівняння для  $\chi_a(x)$ , як для масивного поля, наступним чином:

$$i\vec{\sigma} \cdot \partial \chi - im\sigma^2 \chi^* = 0.$$

Тобто покажіть, по-перше, що це рівняння є релятивістськи інваріантним і, по-друге, що з нього випливає рівняння Кляйна–Гордона  $(\partial^2 + m^2)\chi = 0$ . Цей вигляд масового члена для ферміона називається майорановим масовим членом.

- (b) Чи впливає рівняння Майорани з лагранжіана? Масовий член, здавалося б, виникає при варіюванні виразу  $(\sigma^2)_{ab} \xi_a^* \chi_b$ . Та оскільки  $\sigma^2$  є антисиметричною матрицею, цей вираз обернувся б на нуль, якби  $\chi(x)$  було звичайним  $c$ -числовим полем. Ми знаємо, що при квантуванні  $\chi(x)$  стане антикомутованим квантовим полем. Отже, є сенс розвинути його класичну теорію, розглядаючи  $\chi(x)$  як класичне антикомутоване поле, тобто як таке, що набуває значень у *грасманових числах*, що задовольняють умові

$$\alpha\beta = -\beta\alpha \quad \text{для будь-яких } \alpha, \beta.$$

Зазначимо, що з цих співвідношень випливає  $\alpha^2 = 0$ . Грасманове поле  $\xi(x)$  можна розкласти за базисом функцій, як

$$\xi(x) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x),$$

де  $\phi_n(x)$  — ортогональні  $c$ -числові функції, а  $\alpha_n$  — набір незалежних ґрасманових чисел. Визначимо комплексне спряження добутку ґрасманових чисел як таке, що обертає їхній порядок:

$$(\alpha\beta)^* \equiv \beta^* \alpha^* = -\alpha^* \beta^*.$$

Це правило копіює ермітове спряження квантових полів. Покажіть, що класична дія

$$S = \int d^4x \left[ \chi^\dagger i \vec{\sigma} \cdot \partial \chi + \frac{im}{2} (\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \right],$$

(де  $\chi^\dagger = (\chi^*)^T$ ) є дійсною ( $S^* = S$ ), і варіювання  $S$  за величинами  $\chi$  та  $\chi^*$  призводить до рівняння Майорани.

**(с)** Запишемо 4-компонентне діракове поле, як

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

і нагадаємо, що нижній компонент  $\psi$  перетворюється за представленням, унітарно еквівалентним комплексно-спряженому представленню  $\psi_R$ . Таким чином, ми можемо переписати 4-компонентне діракове поле в термінах двох 2-компонентних спінорів:

$$\psi_L(x) = \chi_1(x), \quad \psi_R(x) = i\sigma^2 \chi_2^*(x).$$

Перепишіть лагранжіан Дірака у термінах  $\chi_1$  та  $\chi_2$  і зверніть увагу на форму масового члена.

**(d)** Покажіть, що дія пункту (с) має глобальну симетрію. Обчисліть дивергенцію струмів

$$J^\mu = \chi^\dagger \vec{\sigma}^\mu \chi, \quad J^\mu = \chi_1^\dagger \vec{\sigma}^\mu \chi_1 - \chi_2^\dagger \vec{\sigma}^\mu \chi_2,$$

для теорій пунктів (b) та (с) відповідно і зіставте результати з симетріями цих теорій. Побудуйте теорію з  $N$  вільних масивних 2-компонентних ферміонних полів з  $O(N)$  симетрією (тобто з обертальною симетрією в  $n$ -вимірному просторі).

**(е)** Проквантуйте теорію Майорани пунктів (a) та (b). Тобто, переведіть  $\chi(x)$  у квантове поле, що задовольняє канонічному антикомутаційному співвідношенню

$$\{\chi_a(\mathbf{x}), \chi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab},$$

побудуйте самоспряжений гамільтоніан і знайдіть представлення канонічних комутаційних співвідношень, які діагоналізують гамільтоніан у термінах операторів народження та знищення. (Вказівка: порівняйте поле  $\chi(x)$  з двома верхніми компонентами квантованого діракового поля.)

**3.5. Суперсиметрія.** Можна написати теорії поля з безперервними симетріями, що поєднують ферміони та бозони; такі перетворення називають *суперсиметріями*.

- (а) Найпростішим прикладом суперсиметричної теорії поля є теорія вільного комплексного бозонного поля й вільного вейлевого ферміонного поля з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \chi + F^* F.$$

Тут  $F$  є додатковим комплексним скалярним полем з рівнянням руху  $F = 0$ . Покажіть, що цей лагранжіан є інваріантним (з точністю до повної дивергенції) відносно інфінітезимальних перетворень

$$\begin{aligned} \delta \phi &= -i \varepsilon^T \sigma^2 \chi, \\ \delta \chi &= \varepsilon F + \sigma \cdot \partial \phi \sigma^2 \varepsilon^*, \\ \delta F &= -i \varepsilon^\dagger \bar{\sigma} \cdot \partial \chi, \end{aligned}$$

де параметр  $\varepsilon_a$  є 2-компонентним грасмановим спіном.

- (b) Покажіть, що член

$$\Delta \mathcal{L} = \left[ m \phi F + \frac{1}{2} i m \chi^T \sigma^2 \chi \right] + (\text{к. с.})$$

є також лівоінваріантним відносно перетворення, заданого в пункті (а). Усуньте  $F$  з повного лагранжіана  $L + \Delta L$ , розв'язуючи його рівняння руху, і покажіть, що бозонне та ферміонне поля  $\phi$  і  $\chi$  мають однакові маси.

- (c) Можна записати суперсиметричні нелінійні рівняння поля, додавши до лагранжіана члени третього та вищих порядків. Покажіть, що наступна, досить загальна теорія поля з  $(\phi_i, \chi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , є суперсиметричною:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^* \partial^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \chi_i + F_i^* F_i + \left( F_i \frac{\partial W[\phi]}{\partial \phi_i} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 W[\phi]}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i^T \sigma^2 \chi_j + \text{к. с.} \right),$$

де  $W[\phi]$  є довільною функцією поля  $\phi_i$ , яка називається *суперпотенціалом*. Для простого випадку  $n = 1$  і  $W = g \phi^3 / 3$  напишіть рівняння руху для  $\phi$  та  $\chi$  (після усунення  $F$ ).

**3.6. Перетворення Фірца.** Нехай  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  є чотири 4-компонентні діракові спинори. У тексті ми довели перестановочні формули Фірца (3.78) і (3.79). Перша з них може бути записана в 4-компонентних позначеннях, як

$$\bar{u}_1 \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_2 \bar{u}_3 \gamma_\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_4 = -\bar{u}_1 \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_4 \bar{u}_3 \gamma_\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_2.$$

Насправді є подібні перестановочні формули для всіх добутоків

$$(\bar{u}_1 \Gamma^A u_2) (\bar{u}_3 \Gamma^B u_4),$$

де  $\Gamma^A$ ,  $\Gamma^B$  — будь-яка з 16 комбінацій матриць Дірака, наведених у § 3.4.

**(а)** Для початку нормуємо 16 матриць  $\Gamma^A$  за умовою

$$\text{Tr}[\Gamma^A \Gamma^B] = 4 \delta^{AB}.$$

Це дає  $\Gamma^A = \{1, \gamma^0, i\gamma_j, \dots\}$ . Випишіть усі 16 елементів цього набору.

**(b)** Запишіть головну тотожність Фірца, як рівняння

$$(\bar{u}_1 \Gamma^A u_2) (\bar{u}_3 \Gamma^A u_4) = \sum_{C,D} C^{AB}_{CD} (\bar{u}_1 \Gamma^C u_4) (\bar{u}_3 \Gamma^D u_2)$$

з невідомими коефіцієнтами  $C^{AB}_{CD}$ . Використавши повноту набору матриць  $\Gamma^A$ , покажіть, що

$$C^{AB}_{CD} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\Gamma^C \Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B].$$

**(с)** Отримайте у явному вигляді закони перетворення Фірца для добутоків  $(\bar{u}_1 u_2)(\bar{u}_3 u_4)$  і  $(\bar{u}_1 \gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3 \gamma_\mu u_4)$ .

**3.7.** Ця задача стосується дискретних симетрій  $P$ ,  $C$ , і  $T$ .

**(а)** Отримайте трансформаційні властивості при перетвореннях  $P$ ,  $C$ , і  $T$  антисиметричної тензорної ферміонної білінійної форми  $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ , де  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Це довершує таблицю трансформаційних властивостей білінійних форм, наведену наприкінці розділу.

**(b)** Нехай  $\phi(x)$  — комплексне поле Кляйна–Гордона, на зразок розглянутого в Задачі 2.2. Знайдіть унітарні оператори  $P$ ,  $C$  та антиунітарний оператор  $T$  (всі визначені через їхню дію на оператори знищення  $a_p$  і

$b_p$  для часток та античасток Кляйна–Гордона), які дають наступні перетворення для поля Кляйна–Гордона:

$$P\phi(t, \mathbf{x})P = \phi(t, -\mathbf{x});$$

$$T\phi(t, \mathbf{x})T = \phi(-t, \mathbf{x});$$

$$C\phi(t, \mathbf{x})C = \phi^*(t, \mathbf{x}).$$

Знайдіть трансформаційні властивості компонентів струму

$$J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

при перетвореннях  $P$ ,  $C$ , і  $T$ .

- (с) Покажіть, що будь-який самоспряжений лоренц-скалярний локальний оператор, утворений з  $\psi(x)$ ,  $\phi(x)$  і спряжених до них полів, має  $PCT = +1$ .

**3.8. Зв'язані стани.** Дві частки зі спіном  $1/2$  можуть об'єднатися у стан з повним спіном 0 або 1. Хвильові функції цих станів будуть відповідно непарними або парними при перестановці їхніх спінів.

- (а) Використайте цю інформацію для обчислення значень  $P$ - і  $C$ -парності для всіх електрон-позитронних зв'язаних станів з  $S$ ,  $P$  або  $D$  хвильовими функціями.
- (б) Оскільки електрон-фотонна взаємодія задана гамільтоніаном

$$\Delta H = \int d^3\mathbf{x} e A_\mu j^\mu,$$

де  $j^\mu$  — електричний струм, то електродинаміка інваріантна відносно  $P$  і  $C$ , якщо компоненти векторного потенціалу мають такі ж значення  $P$ - і  $C$ -парності, як і відповідні компоненти  $j^\mu$ . Покажіть, що звідси випливає такий дивовижний факт: основний стан позитронію зі спіном 0 може розпастися на два фотони, але основний стан зі спіном 1 мусить розпадатися на три фотони. Знайдіть правила відбору для анігіляції вищих станів позитронію і для однофотонних переходів між рівнями позитронію.

## Розділ 4

# Поля із взаємодією і фейнманові діаграми

### § 4.1. Теорія збурень — філософія і приклади

Ми детально розглянули квантування двох вільних теорій поля, які приблизно описують більшість відомих у природі часток. Проте досі стани вільних часток були вільними станами гамільтоніана; ми не розглядали ні взаємодію, ні розсіяння. Щоб отримати точнішу картину реального світу, ми мусимо включити до гамільтоніана (або лагранжіана) нові, нелінійні члени, які поєднують між собою різні фур'є моди (і відповідні їм частки). Для збереження причинності будемо вимагати, щоб нові члени містили добутки полів у одній точці простору-часу: так,  $[\phi(x)]^4$  годиться, а  $\phi(x)\phi(y)$  — ні. Отже, члени, що описують взаємодію, матимуть вигляд

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_{\text{int}}[\phi(x)] = - \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi(x)].$$

Наразі обмежимося теоріями, у яких  $\mathcal{H}_{\text{int}} (= -\mathcal{L}_{\text{int}})$  є функцією лише полів, а не їхніх похідних.

У цьому розділі ми розглянемо три важливі приклади теорій поля із взаємодією. Першою є теорія „фі-чотири“:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (4.1)$$

де  $\lambda$  — безрозмірна *константа зв'язку*. (Взаємодія  $\phi^3$  була б трохи простіша, проте в цьому разі енергія не була б позитивно-визначена, аж поки не додано вищий парний степінь від  $\phi$ .) Хоча ми вивчаємо цю теорію з суто педагогічною метою (оскільки вона є найпростішою квантовою теорією із взаємодією), моделі реального світу таки містять  $\phi^4$ -взаємодію; найважливішим прикладом у фізиці часток є самодія гігсового поля в стандартній електрослабкій теорії. А в другому томі ми побачимо, що теорія  $\phi^4$  також постає у статистичній механіці.

Рівняння руху для теорії  $\phi^4$ ,

$$(\partial^2 + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3, \quad (4.2)$$

неможливо розв'язати через фур'є-аналіз, як вільне рівняння Кляйна–Гордона. У квантовій теорії ми накладаємо рівночасове комутаційне співвідношення

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

яке не залежить від  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ . (Зазначимо, втім, що якби  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  містив  $\partial_\mu \phi$ , то визначення  $\pi(\mathbf{x})$  зазнало б змін.) Досить простою вправою буде виписати гамільтоніан цієї теорії і знайти гайзенбергове рівняння руху для оператора  $\phi(x)$ ; результат збігається з класичним рівнянням руху (4.2), як це було і з вільною теорією.

Нашим другим прикладом теорії поля із взаємодією буде квантова електродинаміка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{КЕД}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = \\ &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де  $A_\mu$  є електромагнітним векторним потенціалом,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — тензором електромагнітного поля, а  $e = -|e|$  — електричним зарядом. (Щоб описати ферміон з зарядом  $Q$ , треба замінити  $e$  на  $Q$ . Якщо ми хочемо розглянути кілька типів заряджених часток, то просто продублюємо  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  і  $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$  для кожного різновиду.) Гідною подиву є та обставина, що цей простий лагранжіан описує майже всі явища, які ми спостерігаємо від макроскопічних масштабів до відстаней  $10^{-13}$  см. Насправді ж лагранжіан у КЕД можна записати ще простіше:

$$\mathcal{L}_{\text{КЕД}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2, \quad (4.4)$$

де  $D_\mu$  є калібровочно-коваріантна похідна,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x). \quad (4.5)$$

Найістотнішою властивістю лагранжіана КЕД є його інваріантність відносно калібровочного перетворення

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (4.6)$$

що реалізується на діраковому полі як *локальне* фазове обертання. Така інваріантність має фундаментальне геометричне значення, що виправдовує запровадження *коваріантної похідної*. Проте для наших цілей досить того, що (4.6) є симетрією теорії.

Рівняння Ейлера–Лагранжа для  $\psi(x)$ ,

$$(i\not{D} - m)\psi(x) = 0, \quad (4.7)$$



є рівнянням Дірака, поєднаним з електромагнітним полем за рецептом *мінімального зв'язку*,  $\partial \rightarrow D$ . Рівняння Ейлера–Лагранжа для поля  $A_\nu$  має вигляд

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\nu \psi = e j^\nu. \quad (4.8)$$

Це неоднорідні рівняння Максвела з питомим струмом  $j^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$ , отриманим зі збереженого діракового векторного струму (3.73). Як і в теорії  $\phi^4$ , рівняння руху також можна записати як гайзенбергові рівняння для операторів  $\psi(x)$  і  $A_\mu(x)$ . Це легко перевірити для  $\psi(x)$ ; проте ми досі не обговорили квантування електромагнітного поля.

Насправді в нашому курсі ми взагалі не розглядатимемо канонічне квантування електромагнітного поля. Це вельми заплутана тема, здебільшого через калібровочну інваріантність. Зазначимо, що оскільки  $\dot{A}^0$  не виникає в лагранжіані (4.3), то імпульс, спряжений до  $A^0$ , тотожно дорівнює нулю. А це суперечить канонічному комутаційному співвідношенню  $[A^0(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Можливе рішення проблеми полягає в тому, щоб квантувати поле в кулоновій калібровці, коли  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  і компонент  $A^0$  є зв'язаною, а не динамічною, змінною; але в цьому разі доводиться жертвувати явною лоренц-інваріантністю. Альтернативно, можна квантувати поле в лоренцовій калібровці  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , модифікувавши лагранжіан таким чином, щоб у ньому з'явився член з  $\dot{A}^0$ . Це дає комутаційні співвідношення  $[A^\mu(\mathbf{x}), A^\nu(\mathbf{y})] = -ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , загалом такі самі, як для чотирьох полів Кляйна–Гордона. Проте додатковий знак мінус у  $[A^0, \dot{A}^0]$  призводить до іншої (втім, подоланої) проблеми: стани, народжені  $a_p^{0\dagger}$ , мають негативну норму.<sup>14</sup>

Фейнманові правила для обчислення амплітуд процесів, де присутні фотони, найлегше отримати через формулювання теорії поля у термінах функціонального інтегрування, яке розглядається в Розділі 9 (Том II). А в третьому томі ми побачимо, що цей метод має додаткову перевагу простого узагальнення на випадок неабелевих калібровочних полів. У цьому розділі ми просто спробуємо вгадати фейнманові правила для фотонів. Це буде зовсім нескладно після того, як отримаємо відповідні правила для аналогічної, але простішої *теорії Юкави*:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} - g \bar{\psi} \psi \phi. \quad (4.9)$$

Це буде нашим третім прикладом. Теорія Юкави схожа на КЕД, проте в ній замість векторного фотона присутня скалярна частка  $\phi$ . Член із взаємодією має безрозмірну константу зв'язку  $g$ , аналогічну електричному заряду  $e$ .

<sup>14</sup> Легко знайти чудовий виклад обох процедур квантування. Так, для кулонової калібровки див. Бйоркен, Дрелл [10], Розділ 14; для лоренцової — Мендл і Шоу [39], Розділ 5.

Початково Юкава запропонував цю теорію, щоб описати взаємодію нуклонів ( $\psi$ ) та піонів ( $\phi$ ). У сучасній теорії часток стандартна модель містить член взаємодії Юкави, що пов'язує скалярне поле Гігса з кварками та лептонами; більшість вільних параметрів у стандартній моделі є юкавськими константами зв'язку.

Виписавши три засадничі взаємодії, зробимо паузу, щоб обговорити, які інші взаємодії можна знайти в природі. На перший погляд, перелік буде нескінченним; навіть для скалярної теорії ми могли б записати взаємодії у вигляді  $\phi^n$  для будь-якого  $n$ . Проте примітно, що одна проста й переконлива аксіома усуває майже всі можливі варіанти, крім кількох. Ця аксіома полягає в тому, що теорія мусить бути *перенормованою*, і обґрунтовується наступними міркуваннями. Члени вищого порядку в теорії збурень, як зазначалося в Розділі 1, містять інтеграли по 4-імпульсах проміжних („віртуальних“) часток. Ці інтеграли часто формально розбігаються, тому в загальному випадку необхідно застосувати певну процедуру обрізання; найпростіший спосіб такої процедури полягає в обмеженні інтегрування великим, але скінченним імпульсом  $\Lambda$ . Наприкінці обчислень здійснюється перехід до межі  $\Lambda \rightarrow \infty$  у сподіванні, що фізичні величини виявляться незалежними від  $\Lambda$ . Якщо це справді так, то теорія називається *перенормованою*. Однак припустимо, що теорія містить взаємодії з константами зв'язку, що мають розмірність маси у певному *від'ємному* степені. Тоді для отримання безрозмірної амплітуди розсіяння ця константа зв'язку має бути помножена на величину позитивної масової розмірності, яка виявляється нічим іншим як параметром обрізання  $\Lambda$ . Такий член розбігається при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , тож теорія не є перенормованою.

Детально ми розглянемо це питання в Розділі 10. А поки лише відзначимо, що будь-яка теорія з константою зв'язку негативної масової розмірності не є перенормованою. Простий розмірний аналіз дозволяє нам легко відкинути майже всіх кандидатів на взаємодію. Оскільки дія  $S = \int \mathcal{L} d^4x$  безрозмірна, то лагранжіан  $\mathcal{L}$  повинен мати розмірність  $[\text{маса}]^4$  (або просто розмірність 4). З вигляду кінетичних членів різних вільних лагранжіанів ми визначаємо, що скалярне та векторне поля  $\phi$  і  $A^\mu$  мають розмірність 1, тоді як розмірність спірного поля  $\psi$  є  $3/2$ . Тепер ми можемо систематизувати всі можливі перенормовані взаємодії.

Для теорій, що включають лише скаляри, припустимими членами із взаємодією є

$$\mu\phi^3 \quad \text{і} \quad \lambda\phi^4.$$

Константа зв'язку  $\mu$  має розмірність 1, тоді як  $\lambda$  безрозмірна. Члени вигляду  $\phi^n$  для  $n > 4$  не годяться, бо їхні константи зв'язку мали б розмірність  $4 - n$ . Певна річ, значно цікавіші теорії можна отримати шляхом включення кількох дійсних або комплексних скалярних полів (див. Задачу 4.3).

Далі ми можемо додати спінові поля. Співорна самодія неприпустима, оскільки  $\psi^3$  (окрім порушення лоренцової інваріантності) має розмірність  $9/2$ . Отже, можлива лише взаємодія Юкави зі скалярними полями:

$$g\bar{\psi}\psi\phi,$$

хоча схожі взаємодії можна побудувати також і з вейлевих та майоранових співорів.

При додаванні векторних полів стають можливими багато нових типів взаємодії. Найбільш знайомою є векторно-співорна взаємодія в КЕД:

$$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

І знов-таки, нескладно побудувати схожі члени з вейлевими та майорановими співорами. Менш важливою є скалярна КЕД з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2, \quad \text{що містить} \quad eA^\mu\phi\partial_\mu\phi^*, \quad e^2|\phi|^2A^2.$$

Це наш перший приклад взаємодії з похідними; квантування такої теорії буде набагато простішим у формалізмі функціональних інтегралів, тому ми відкладемо її розгляд до Розділу 9. Інші можливі лоренц-інваріантні члени мають вигляд

$$A^2(\partial_\mu A^\mu) \quad \text{і} \quad A^4.$$

Хоча це далеко не очевидно, такі члени призводять до протиріч, за винятком лише тих випадків, коли їхні константи зв'язку точно підібрані відповідно до спеціального типу симетрії, яка має включати кілька векторних полів. Ця симетрія лежить в основі *неабелевих калібровочних теорій*, що будуть головним предметом розгляду в третьому томі. Масовий член  $\frac{1}{2}m^2A^2$  для векторних полів також породжує протиріччя, якщо лише він не додається до КЕД; у кожному разі, він порушує (абелеву або неабелеву) калібровочну інваріантність.

Це вичерпує перелік можливих лагранжіанів, що включають скалярні, співорні й векторні частки. Цікаво відзначити, що прийняті зараз моделі елементарних часток охоплюють усі перелічені вище типи взаємодії. Три з них, що будуть вивчені в цьому розділі, покривають майже половину всіх можливостей; решту ми розглянемо далі в нашому курсі.

Припущення, що реалістичні теорії мають бути перенормованими, є надзвичайно зручним, оскільки неперенормована теорія мала б мізерну передбачувану силу. Проте можна задатися питанням, чому природа така люб'язна, що використовує лише перенормовані взаємодії. Слід було б очікувати, що істинна теорія природи є квантовою теорією значно загальнішого типу. Проте можна довести, що незалежно від складності фундаментальної теорії при дуже високих енергіях, її низькоенергетичне наближення, яке ми спостерігаємо в експериментах, має бути перенормованою квантовою теорією поля. Ми покажемо це в § 12.1.

На більш практичному рівні попередній аналіз засвідчує значну різницю в методології між нерелятивістською квантовою механікою та релятивістською квантовою теорією поля. Оскільки потенціал  $V(r)$  у рівнянні Шродінгера цілком довільний, нерелятивістська квантова механіка не встановлює обмежень на вигляд взаємодії в реальному світі. Але щойно ми бачили, як квантова теорія поля висуває дуже жорсткі вимоги до природи (або навпаки). Фактично, з нашого обговорення випливає, що єдина задача, яка залишилась у фізиці часток, полягає в складанні переліку елементарних часток, вимірюванні їхніх мас та констант зв'язку. Можливо, така точка зору грішить надмірною самовпевненістю, але сам факт її існування, вочевидь, означає, що фізики знаходяться на правильному шляху до побудови фундаментальної теорії.

Маючи набір часток та їхніх взаємодій, ми ще повинні отримати з теорії результати, які можна порівняти з експериментом. Як нам провести аналіз квантової механіки поля із взаємодією? Було б добре, якби ми могли знайти явні рішення принаймні для кількох прикладів (тобто обчислити точні власні значення і власні вектори, як це робили для вільних теорій), щоб отримати уявлення про властивості теорій із взаємодією. На жаль, це простіше сказати, ніж зробити. Нам невідомі точно вирішувані (інтегровані) теорії поля із взаємодією в просторі-часі з розмірністю понад два, і навіть інтегровані моделі зі спеціальними симетріями надзвичайно складні. Вивчення таких теорій було б цікавим, проте навряд чи варте зусиль на цьому етапі. Натомість ми повернемося до простішого і додатного до застосування в загальному випадку підходу — а саме, розглядатимемо гамільтоніан взаємодії  $H_{\text{int}}$  як збурення й обчислюватимемо його вплив за теорією збурень у припущенні, що константа зв'язку досить мала для отримання розумного наближення до точної відповіді. І справді, пертурбативний ряд матиме дуже просту структуру, а *фейнманові діаграми* дозволять наочно представити ефекти від взаємодії у довільно високому порядку наближення.

Таке спрощення пертурбативного ряду в релятивістській теорії поля було визначним досягненням Томонаґи, Швінгера і Фейнмана.<sup>15</sup> Для отримання цього спрощення кожен з них незалежно знайшов спосіб переформулювання квантової механіки з усуненням особливої ролі часу, а відтак застосував нову точку зору, щоб представити кожен член пертурбативного ряду як просторово-часовий процес. У Розділі 9 (Том II) ми розвинемо квантову теорію поля з просторово-часової точки зору за методом *функціонального інтегрування* Фейнмана. А в поточному розділі підемо простішим шляхом, уперше розробленим Дайсоном, щоб отримати просторово-часову

<sup>15</sup>Історичну довідку про внесок Томонаґи, Швінгера, Фейнмана і Дайсона див. у [50].

картину теорії збурень за допомогою звичайної техніки квантової механіки.

## § 4.2. Пертурбативний ряд для кореляційних функцій

Почнемо вивчення теорії збурень для полів із взаємодією, націлившись на формалізм, який дозволить нам унаочнити пертурбативні ряди як просторово-часовий процес. Не потребуючи перегляду всієї квантової механіки, ми, проте, переформулюємо залежну від часу теорію збурень у зручній для нашої мети формі. Ясно, що в кінцевому підсумку ми хочемо обчислити перерізи розсіяння та ширини розпаду. Але наразі поставимо менш амбіційну задачу і спробуємо обчислити найпростішу (але й абстрактнішу) величину — *двоточкову кореляційну функцію* або *двоточкову функцію Гріна*

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \quad (4.10)$$

в теорії  $\phi^4$ . Ми ввели позначення  $|\Omega\rangle$  для основного стану теорії із взаємодією, яке в загальному випадку відрізняється від основного стану вільної теорії  $|0\rangle$ . Символ хронологічного упорядкування  $T$  запроваджено для подальшої зручності. Кореляційну функцію можна фізично інтерпретувати як амплітуду розповсюдження частки або збудження поля між  $y$  та  $x$ . У вільній теорії це є просто пропагатор Фейнмана:

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_{\text{free}} = D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (4.11)$$

Ми хотіли б знати, як змінюється цей вираз для теорії із взаємодією. Проаналізувавши двоточкову кореляційну функцію, ми легко узагальнимо результати на кореляційні функції вищого порядку, які міститимуть більше двох польових операторів. У §§ 4.3 і 4.4 ми продовжимо аналіз кореляційних функцій і для їх обчислення за теорією збурень розробимо формалізм фейнманових діаграм. Далі, в §§ 4.5 і 4.6, ми навчимося з допомогою тієї ж техніки обчислювати перерізи розсіяння і ширини розпаду.

Беручись до задачі, запишемо гамільтоніан теорії  $\phi^4$ , як

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3 \mathbf{x} \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

Ми хочемо отримати вираз для двоточної кореляційної функції (4.10) у вигляді ряду за степенями  $\lambda$ . Гамільтоніан взаємодії  $H_{\text{int}}$  зустрічається у (4.10) двічі: по-перше, у визначенні гайзенбергового поля

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}; \quad (4.13)$$

по-друге, у визначенні основного стану  $|\Omega\rangle$ . Ми маємо виразити  $\phi(x)$  і  $|\Omega\rangle$  через величини, якими вміємо маніпулювати, а саме — через оператори вільного поля та вакуум у вільній теорії  $|0\rangle$ .

Простіше почати з  $\phi(x)$ . У кожен фіксований момент часу  $t_0$  ми можемо, як звичайно, розкласти  $\phi$  за сходящими операторами:

$$\phi(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}).$$

Тоді, щоб отримати  $\phi(t, \mathbf{x})$  для  $t \neq t_0$ , просто переходимо до картини Гайзенберга:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

Для  $\lambda = 0$  гамільтоніан  $H$  збігається з  $H_0$ , і тоді маємо

$$\phi(t, \mathbf{x})|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Якщо  $\lambda$  є малою величиною, то цей вираз усе ще даватиме найважливішу частину часової залежності  $\phi(x)$ , тому зручно приписати їй окрему назву: поле в картині взаємодії  $\phi_I(t, \mathbf{x})$ . Оскільки ми можемо діагоналізувати  $H_0$ , то легко виписати  $\phi_I$  явно:

$$\phi_I(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}})|_{x^0=t-t_0}. \quad (4.15)$$

Це знайомий нам вираз для вільного поля з Розділу 2.

Тепер задача полягає в тому, щоб виразити повне гайзенбергове поле  $\phi$  через  $\phi_I$ . Формально це є

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t_0, \mathbf{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \equiv \\ &\equiv U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t_0, \mathbf{x}) U(t, t_0), \end{aligned} \quad (4.16)$$

де ми визначили унітарний оператор

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}, \quad (4.17)$$

відомий, як пропагатор у картині взаємодії або оператор часової еволюції. Ми хотіли б виразити  $U(t, t_0)$  цілком через поле  $\phi_I$ , для якого існує явний запис у термінах сходящих операторів. Для цього відзначимо, що  $U(t, t_0)$  є єдиним рішенням звичайного диференційного рівняння (рівняння Шродінгера) з початковою умовою  $U(t_0, t_0) = 1$ :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{\text{int}}) e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{\text{int}}) e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= H_I(t) U(t, t_0), \end{aligned} \quad (4.18)$$

де

$$\begin{aligned} H_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH_0(t-t_0)} = \\ &= \int d^3\mathbf{x} \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

є гамільтоніаном взаємодії, записаним у картині взаємодії. Рішення цього диференційного рівняння для  $U(t, t_0)$  повинно мати вигляд  $U \sim \exp(-iH_I t)$ ; це було б потрібною нам формулою для  $U$  через  $\phi_I$ . Діючи ретельніше, покажемо, що це рішення є степеневим рядом за  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\ &+ (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Щоб пересвідчитись у цьому, просто візьмемо похідну за часом і побачимо, що кожен член ряду дає попередній член, помножений на  $-iH_I(t)$ . Початкова умова  $U(t, t_0) = 1$  для  $t = t_0$ , безперечно, дотримана.

Зазначимо, що множники  $H_I$  в (4.20) розташовані у *хронологічному порядку* — пізніший завжди знаходиться лівіше. Це дозволяє істотно спростити вираз, скориставшись символом хронологічного упорядкування  $T$ . Наприклад, член  $H_I^2$  можна записати

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\}. \quad (4.21)$$

Подвійний інтеграл у правій частині враховує все двічі, оскільки в  $t_1 t_2$ -площині підінтегральний вираз  $T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\}$  симетричний відносно прямої  $t_1 = t_2$  (див. Рис. 4.1).

Аналогічна тотожність справедлива і для членів вищих порядків:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\}.$$

Хоча цей випадок дещо складніше зобразити наочно, але неважко переконатися, що рівність правильна. З її допомогою можемо записати  $U(t, t_0)$  в

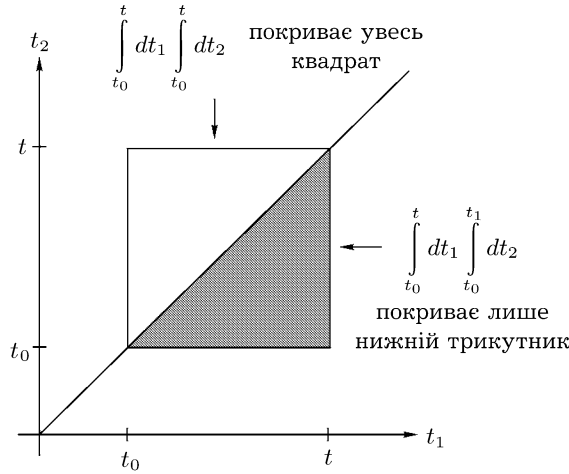


Рис. 4.1. Геометрична інтерпретація формули (4.21).

надзвичайно компактній формі:

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \\
 &\quad + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \dots \equiv \quad (4.22) \\
 &\equiv T\left\{\exp\left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')\right]\right\},
 \end{aligned}$$

де хронологічно упорядкована експонента визначається як ряд Тейлора, кожен член якого хронологічно упорядкований. В реальних обчисленнях ми зберігаємо лише кілька перших членів цього ряду; хронологічно упорядкована експонента є просто компактним записом, що дозволяє легко запам'ятати потрібний вираз.

Тепер ми опанували  $\Phi(t, \mathbf{x})$  — записали його, як і вимагалось, цілком через  $\Phi_I$ . Перш ніж перейти до розгляду  $|\Omega\rangle$ , зручно буде узагальнити визначення  $U$ , дозволивши його другому аргументові приймати інші значення, окрім „часу відліку“  $t_0$ . Таке визначення цілком очевидне:

$$U(t, t') \equiv T\left\{\exp\left[-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'')\right]\right\} \quad (t \geq t'). \quad (4.23)$$



Звідси випливає кілька важливих властивостей оператора  $U(t, t')$ . Перевіряючи, він задовольняє тому ж самому диференційному рівнянню (4.18):

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H_I(t) U(t, t'), \quad (4.24)$$

але тепер з початковою умовою  $U = 1$  для  $t = t'$ . З цього рівняння маємо

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)}, \quad (4.25)$$

і це доводить, що  $U$  є унітарним. Нарешті, для  $U(t, t')$  виконуються такі тождества (при  $t_1 \geq t_2 \geq t_3$ ):

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3); \quad U(t_1, t_3) [U(t_2, t_3)]^\dagger = U(t_1, t_2). \quad (4.26)$$

Тепер ми можемо перейти до розгляду  $|\Omega\rangle$ . Оскільки  $|\Omega\rangle$  є основним станом  $H$ , його можна виокремити за допомогою наступної процедури. Уявімо, що початковим станом є  $|0\rangle$ , основний стан  $H_0$ , і система еволюціонує під дією  $H$ :

$$e^{-iH\tau} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n\tau} |n\rangle \langle n|0\rangle,$$

де  $E_n$  є власними значеннями  $H$ . Мусимо припустити, що  $|\Omega\rangle$  перекривається з  $|0\rangle$ , тобто  $\langle\Omega|0\rangle \neq 0$  (якщо це не так, то  $H_I$  в жодному сенсі не можна вважати малим збуренням). Тоді вищевказаний ряд містить  $|\Omega\rangle$ , і ми можемо записати

$$e^{iH\tau} |0\rangle = e^{-iE_0\tau} |\Omega\rangle \langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n\tau} |n\rangle \langle n|0\rangle,$$

де  $E_0 \equiv \langle\Omega|H|\Omega\rangle$ . (Нульова енергія визначається як  $H_0|0\rangle = 0$ .) Оскільки  $E_n > E_0$  для всіх  $n \neq 0$ , ми можемо позбутися всіх членів з  $n \neq 0$ , наближаючи  $\tau$  до  $\infty$  у напрямку, трохи відхиленому від дійсної осі:  $\tau \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ . Тоді експоненційний множник  $e^{-iE_n\tau}$  найповільніше спадає для  $n = 0$ :

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_n\tau} \langle\Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH\tau} |0\rangle. \quad (4.27)$$

Оскільки тепер  $\tau$  дуже велике, ми можемо змістити його на малу константу:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_n(\tau+t_0)} \langle\Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(\tau+t_0)} |0\rangle = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_n(t_0-(-\tau))} \langle\Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(t_0-(-\tau))} e^{-iH(-\tau-t_0)} |0\rangle = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_n(t_0-(-\tau))} \langle\Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -\tau) |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

У другому рядку ми використали  $H_0|0\rangle = 0$ . Якщо відкинути  $c$ -числовий множник попереду, цей вираз вказує, що ми можемо отримати  $|\Omega\rangle$  через дію оператора еволюції  $U$  на стан  $|0\rangle$  від часу  $-\tau$  до часу  $t_0$ . Так само ми можемо виразити  $\langle\Omega|$  як

$$\langle\Omega| = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(\tau, t_0)(e^{-iE_n(t_0-(-\tau))}\langle\Omega|0\rangle)^{-1}. \quad (4.29)$$

Зберемо разом усі частини двоточкової кореляційної функції. Тимчасово припустимо, що  $x^0 > y^0 > t_0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(\tau-t_0)}\langle\Omega|0\rangle)^{-1} \langle 0|U(\tau, t_0) \times \\ &\quad \times [U(x^0, t_0)]^\dagger \phi_I(x) U(x^0, t_0) \times \\ &\quad \times [U(y^0, t_0)]^\dagger \phi_I(y) U(y^0, t_0) \times \\ &\quad \times U(t_0, -T)|0\rangle (e^{-iE_n(t_0-(-\tau))}\langle\Omega|0\rangle)^{-1} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-iE_0(2\tau)})^{-1} \times \\ &\quad \times \langle 0|U(\tau, x^0)\phi_I(x)U(x^0, y^0)\phi_I(y)U(y^0, -\tau)|0\rangle \end{aligned} \quad (4.30)$$

Це мало б простіший вигляд, якби не громіздкий множник попереду. Щоб позбутись його, розділимо вираз на одиницю, представлену у формі

$$1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = (|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-iE_0(2\tau)})^{-1} \langle 0|U(\tau, t_0)U(t_0, -\tau)|0\rangle.$$

Тоді наша формула (все ще для  $x^0 > y^0$ ) набуває вигляду

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|U(\tau, x^0)\phi_I(x)U(x^0, y^0)\phi_I(y)U(y^0, -\tau)|0\rangle}{\langle 0|U(\tau, -\tau)|0\rangle}.$$

Тепер звернемо увагу, що всі поля в обох частинах виразу хронологічно упорядковані. Це також справедливо і для випадку  $y^0 > x^0$ . Таким чином, маємо остаточний вираз, дійсний для будь-яких  $x^0$  і  $y^0$ :

$$\begin{aligned} \langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y) \exp[-i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t)]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\exp[-i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t)]\}|0\rangle} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Перевага розгляду хронологічних добутків очевидна — це дозволяє вставити будь-що під знак  $T$ -оператора. Схожа формула справедлива і для вищих кореляційних функцій від довільного числа полів; для кожного додаткового множника  $\phi$  у лівій частині треба вставити додатковий множник  $\phi_I$  у праву частину. Наразі отриманий вираз ще точний. Але тепер він ідеально підходить для виконання пертурбативних обчислень — слід лише зберегти потрібну кількість членів у ряді Тейлора для експоненти.

### § 4.3. Теорема Віка

Ми звели проблему обчислення кореляційних функцій до обчислення виразів вигляду

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle,$$

тобто вакуумних середніх від хронологічно упорядкованих добутків скінченної (але довільної) кількості вільних польових операторів. При  $n = 2$  цей вираз є просто фейнмановим пропагатором. Для великих  $n$  цю величину можна обчислити напряду, розклавши  $\phi_I$  через сходові оператори. Проте в цьому та наступному параграфах ми знайдемо спосіб гранично спростити такі обчислення.

Знову розглянемо випадок двох полів,  $\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \} | 0 \rangle$ . Ми вже знаємо, як обчислити цю величину, проте зараз воліли б переписати вираз у формі, зручній як для розрахунків, так і для узагальнення на випадок більше ніж двох полів. Щоб зробити це, розкладемо поле  $\phi_I(x)$  на позитивно- та негативно-частотні частини:

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x), \quad (4.32)$$

де

$$\begin{aligned} \phi_I^+(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x}; \\ \phi_I^-(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip \cdot x}. \end{aligned}$$

Таку декомпозицію можна зробити для будь-якого вільного поля. Вона корисна, оскільки

$$\phi_I^+(x)|0\rangle = 0 \quad \text{і} \quad \langle 0|\phi_I^- = 0.$$

Для прикладу розглянемо випадок  $x^0 > y^0$ . Хронологічний добуток двох полів має вигляд

$$\begin{aligned} T\phi_I(x)\phi_I(y) &=_{x^0>y^0} \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^+(x)\phi_I^-(y) + \\ &\quad + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) = \\ &= \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \\ &\quad + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) + [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

У кожному члені, за винятком комутатора, всі  $a_{\mathbf{p}}$  знаходяться праворуч від усіх  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ . Такі доданки (як, приміром,  $(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{l}})$ ) називають *нормально впорядкованими*, і вони мають нульове вакуумне середнє. Також визначимо

символ нормального упорядкування  $N()$ , що розміщує в нормальному порядку всі оператори, на які він діє. Наприклад,

$$N(a_p a_k^\dagger a_q) \equiv a_k^\dagger a_p a_q \quad (4.34)$$

Порядок  $a_p$  і  $a_q$  у правій частині не має значення, оскільки вони комутують.<sup>16</sup>

Якщо натомість ми розглянемо випадок  $y^0 > x^0$ , то отримаємо ті ж самі чотири нормально впорядковані члени, як і в (4.33), але тепер останній комутатор буде  $[\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)]$ . Тому визначимо ще одну величину, згортку двох полів, наступним чином:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{для } x^0 > y^0; \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{для } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Ця величина є достоту фейнмановим пропагатором:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x - y). \quad (4.36)$$

З цього моменту ми для зручності часто вилучатимемо нижній індекс  $I$ ; згортки завжди міститимуть поля в картині взаємодії.

Тепер співвідношення між хронологічним та нормальним упорядкуванням записується дуже просто (принаймні для двох полів):

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(x)\phi(y) + \overline{\phi(x)\phi(y)}\}. \quad (4.37)$$

Запровадивши нові позначення, ми легко отримаємо узагальнення для довільного числа полів:

$$\begin{aligned} T\{\phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_m)\} &= \\ &= N\{\phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_m) + \text{всі можливі згортки}\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ця тотожність відома як *теорема Віка*, і зараз ми її доведемо. При  $m = 2$  ця теорема еквівалентна рівності (4.37). Фраза *всі можливі згортки* означає, що кожний з можливих попарних згорток  $m$  полів відповідає один доданок. Отже, при  $m = 4$  (записуючи для простоти  $\phi(x_a)$  як  $\phi_a$ ) маємо

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} &= N\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \\ &+ \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\phi_2\overline{\phi_3\phi_4} + \\ &+ \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

<sup>16</sup>У літературі також часто зустрічається позначення  $:\phi_1\phi_2:$  замість  $N(\phi_1\phi_2)$ .

Коли згортка поєднує два оператори, що не є сусідніми, ми все одно визначаємо її як  $D_F$ . Наприклад,

$$N\{\overline{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}\} \text{ означає } D_F(x_1 - x_3) \cdot N\{\phi_2\phi_4\}$$

У вакуумному середньому (4.39) будь-який член з незгорненими операторами дає нуль (оскільки  $\langle 0|N(\text{будь-який оператор})|0\rangle = 0$ ). Виживають лише три повністю згорнені доданки у третьому рядку, і всі вони є  $c$ -числами, тож

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + \\ &+ D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + \\ &+ D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Тепер доведемо теорему Віка, і зробимо це за індукцією від числа полів  $m$ . Випадок  $m = 2$  ми вже розглянули. Припустимо, що теорема є вірною для  $m - 1$  полів, і доведемо її справедливість для  $m$  полів. Без втрати загальності обмежимося випадком  $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots x_m^0$ ; якщо це не так, ми можемо просто перепозначити точки, що жодним чином не вплине на обидві частини (4.38). Тоді, застосувавши теорему Віка до  $\phi_2 \dots \phi_m$ , одержимо

$$\begin{aligned} T\{\phi_1 \dots \phi_m\} &= \phi_1 \dots \phi_m = \\ &= \phi_1 N\{\phi_2 \dots \phi_m + \text{всі згортки без } \phi_1\} + \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) N\{\phi_2 \dots \phi_m + \text{всі згортки без } \phi_1\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ми хочемо перемістити  $\phi_1^+$  і  $\phi_1^-$  до  $N\{\}$ . Для члена  $\phi_1^-$  це не викликає труднощів, оскільки він, перебуваючи зліва, вже є нормально впорядкованим. А от член з  $\phi_1^+$  ще належить привести до нормальної форми, переставляючи його правіше від решти операторів  $\phi$ . Розглянемо, для прикладу, доданок без згорток

$$\begin{aligned} \phi_1^+ N\{\phi_2 \dots \phi_m\} &= N\{\phi_2 \dots \phi_m\} \phi_1^+ + [\phi_1^+ N\{\phi_2 \dots \phi_m\}] = \\ &= N\{\phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_m\} + N\{[\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \dots \phi_m + \\ &\quad + \phi_2 [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4 \dots \phi_m + \dots\} = \\ &= N\{\phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_m + \overline{\phi_1\phi_2} \phi_3 \dots \phi_m + \\ &\quad + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3} \dots \phi_m + \dots\}. \end{aligned}$$

Перший член у передостанньому рядку разом з аналогічним членом, що містить  $\phi_1^-$ , утворюють  $N\{\phi_1\phi_2 \cdots \phi_m\}$ , тож ми маємо перший доданок у правій частині теореми Віка, а також усі можливі доданки з одиночною згорткою поля  $\phi_1$  з іншим полем. Так само доданок у (4.41), що має одну згортку, дає всі можливі члени, що містять як цю згортку, так і згортку поля  $\phi_1$  з одним з решти полів. Проробивши це з усіма доданками в (4.41), ми зрештою отримаємо всі можливі згортки всіх полів, включно з  $\phi_1$ . Отже, крок індукції завершено і теорему Віка доведено.

## § 4.4. Фейнманові діаграми

Теорема Віка дозволяє нам перетворити вираз типу

$$\langle 0 | T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n)\} | 0 \rangle$$

на суму добутків фейнманових пропагаторів. Тепер ми готові розробити діаграмну інтерпретацію таких виразів. Передовсім розглянемо випадок чотирьох полів у різних просторово-часових точках, для якого ми отримали рівняння (4.40). Зобразимо кожну з точок  $x_1, \dots, x_4$  у вигляді крапки, а кожен множник  $D_F(x - y)$  як лінію, що поєднає  $x$  та  $y$ . Тоді (4.40) можна представити, як суму трьох діаграм (що називаються *фейнмановими діаграмами*):

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \end{array} \quad (4.42)$$

Хоча ця величина не є точно вимірюваною, діаграми дозволяють дати наступну інтерпретацію: частки народжуються у двох точках простору-часу, розповсюджуються в інші точки і там знищуються. Це може відбутися у три різні способи, що відповідають трьом різним можливостям поєднання точок у пари, як показано на трьох діаграмах. Повна амплітуда процесу є сумою трьох діаграм.

Ситуація стає набагато цікавішою, коли вираз містить більше одного поля в одній і тій самій просторово-часовій точці. Тому повернімося до обчислення двоточкової функції  $\langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\} | \Omega \rangle$  з формули (4.31). Ми ігноруватимемо знаменник до кінця цього параграфу. Чисельник з розкладеною в степневий ряд експонентою є

$$\langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y) + \phi(x)\phi(y) \left[ -i \int dt H_I(t) \right] + \cdots \} | 0 \rangle. \quad (4.43)$$

Перший член дає результат вільної теорії  $\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = D_F(x-y)$ . Другий член у теорії  $\phi^4$  має вигляд

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)(-i)\int dt\int d^3\mathbf{z}\frac{\lambda}{4!}\phi^4\}|0\rangle = \\ = \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)\int d^4z\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\}|0\rangle. \end{aligned}$$

Тепер застосуємо теорему Віка. Ми отримали по одному доданку для кожного способу попарної згортки шести операторів  $\phi$  один з одним. Є п'ятнадцять способів зробити це, проте (на щастя) лише два з них справді різні. Якщо ми згорнули  $\phi(x)$  з  $\phi(y)$ , то є три способи згорнути чотири  $\phi(z)$  один з одним, і всі вони дають однакові вирази. Інша можливість полягає в тому, щоб згорнути  $\phi(x)$  з одним із  $\phi(z)$  (чотири варіанти),  $\phi(y)$  з одним із інших  $\phi(z)$  (три варіанти) і решту два  $\phi(z)$  між собою (один варіант). Є дванадцять способів зробити це, і всі призводять до однакових виразів. У підсумку маємо

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)(-i)\int dt\int d^3\mathbf{z}\frac{\lambda}{4!}\phi^4\}|0\rangle = \\ = 3 \cdot \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z) + \\ + 12 \cdot \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) \int d^4z D_F(y-z) D_F(x-z) D_F(z-z). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ми краще зрозуміємо цей вираз, якщо представимо кожен його член як фейнманову діаграму. Знову зобразимо кожну його згортку  $D_F$  у вигляді лінії і кожну просторово-часову точку як крапку. Проте наразі мусимо відрізняти „зовнішні“ точки  $x$  та  $y$  від „внутрішньої“  $z$ ; кожна внутрішня точка асоційована з множником  $(-i\lambda)\int d^4z$ . Про постійні множники ми подбаємо трохи згодом. Скориставшись з цих правил, бачимо, що наведений вище вираз (4.44) дорівнює сумі двох діаграм:

$$\left( \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} y \text{---} \\ \text{---} z \text{---} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} z \text{---} y \text{---} \\ \text{---} z \text{---} \end{array} \right)$$

Ми позначаємо лінії на цих діаграмах, як *пропатори*, бо вони представляють амплітуди розповсюдження (англ. *propagation*)  $D_F$ . Внутрішні точки, де зустрічаються лінії, називаються *вершинами*. Оскільки  $D_F(x-y)$  є амплітудами розповсюдження між  $x$  та  $y$  для вільної частки Кляйна–Гордона, то діаграми фактично інтерпретують аналітичну формулу, як процес народження, розповсюдження і знищення часток у просторі-часі.

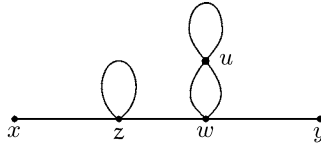
Тепер поглянемо на складнішу згортку від члена  $\lambda^3$  у ряді кореляційної функції:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(y) \frac{1}{3!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^3 \int d^4 z \phi\phi\phi\phi \int d^4 w \phi\phi\phi\phi \int d^4 u \phi\phi\phi\phi | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{3!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^3 \int d^4 z d^4 w d^4 u D_F(x-z) D_F(z-z) \times \\ \times D_F(z-w) D_F(w-y) D_F(w-u) D_F(u-u). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Кількість „різних“ згорток, які дають однаковий вираз, є значною:

$$\underbrace{3!}_{\text{перестановка вершин}} \times \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{розташування згортки у } z \text{ вершині}} \times \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{розташування згортки у } w \text{ вершині}} \times \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{розташування згортки в } u \text{ вершині}} \times \underbrace{1/2}_{\text{перестановка } w-u \text{ згортки}}$$

Добуток цих комбінаторних множників дає 10 368, близько  $1/13$  від загальної кількості 135 135 можливих повних згорток 14 операторів. Структуру цієї конкретної згортки можна представити наступною „кактусною“ діаграмою:



З очевидних причин прийнято вважати, що одна ця діаграма представляє суму всіх 10 368 однакових членів.

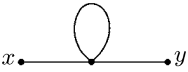
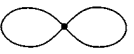
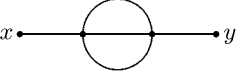

На практиці спочатку завжди зображають діаграму, використовуючи її, як мнемонічний метод запису аналітичного виразу. Але тоді виникає питання: яка є повна константа? Звичайно, ми могли б обчислити її, як це робили вище, — поставити у відповідність кожній вершині множник  $\int d^4 z (-i\lambda/4!)$ , взяти  $1/n!$  з ряду Тейлора, а потім провести комбінаторний аналіз, виписавши добутки полів, як у (4.45), і порахувавши всі варіанти. Проте  $1/n!$  з ряду Тейлора майже завжди скорочує  $n!$  від перестановок вершин, отож ми можемо забути про обидва ці множники. Крім того, типова вершина має чотири лінії, що приходять з чотирьох різних місць, і таким чином різні розташування цих згорток у  $\phi\phi\phi\phi$  дають множник  $4!$  (як показано вище, у  $w$ -вершині), що скорочує знаменник у  $(-i\lambda/4!)$ . Тому прийнято зіставляти з кожною вершиною вираз  $\int d^4 z (-i\lambda)$ . (Це й пояснює присутність  $4!$  при коефіцієнті зв'язку для взаємодії  $\phi^4$ .)

Для вищенаведеної діаграми ця схема дає константу, зовелику через множник  $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ , який називається *фактором симетрії* діаграми. Два



множники 2 походять від ліній, що починаються й закінчуються в тій самій вершині, бо діаграма симетрична відносно перестановки двох кінців таких ліній. Останній множник 2 виникає від поєднання  $w$  з  $u$  двома пропагаторами, оскільки діаграма симетрична при взаємній перестановці цих двох ліній. Третій можливий тип симетрії впливає з еквівалентності двох вершин. Щоб отримати правильний повний множник, ми ділимо на фактор симетрії діаграми, який у загальному випадку дорівнює числу способів перестановок компонентів, що не змінюють діаграму.

Більшості з вас ніколи не доведеться обчислювати діаграми з фактором симетрії більшим за 2, тому немає потреби занадто перейматися цими технічними деталями. Проте наведемо кілька прикладів, щоб продемонструвати застосування цих правил:


	$S = 2$
	$S = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
	$S = 3! = 6$
	$S = 3! \cdot 2 = 12$

При наявності сумнівів ви завжди можете визначити фактор симетрії, підрахувавши еквівалентні згортки, як це робилося вище.

Тепер ми готові підсумувати наші правила для отримання чисельника виразу (4.31):

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \left[ -i \int dt H_I(t) \right] \} | 0 \rangle = \left( \begin{array}{l} \text{сума всіх можливих діаграм} \\ \text{з двома зовнішніми точками} \end{array} \right),$$

де кожна діаграма побудована з пропагаторів, вершин і зовнішніх точок. Правила для зіставлення аналітичних виразів з відповідними частинами діаграм називаються *правилами Фейнмана*. В теорії  $\phi^4$  ці правила такі:

1. Для кожного пропагатора,  $x \text{---} y = D_F(x - y);$
2. Для кожної вершини,   $= (-i\lambda) \int d^4z;$
3. Для кожної зовнішньої точки,  $x \text{---} = 1;$
4. Розділити на фактор симетрії.

Один із способів інтерпретації цих правил полягає в тому, щоб вважати вершинний фактор  $(-i\lambda)$  амплітудою утворення та/або поглинання часток у вершині. Інтеграл  $\int d^4 z$  дає суму за всіма точками, де може відбуватися процес. Це є вираженням квантовомеханічного *принципу суперпозиції*: якщо процес може проходити кількома альтернативними шляхами, то слід *додати* їхні амплітуди. Для обчислення кожної окремої амплітуди, згідно з правилами Фейнмана, треба *перемножити* амплітуди (пропагатори та вершинні фактори) для кожної незалежної частини процесу.

Оскільки ці правила написані в термінах просторово-часових точок  $x, y$  і т. д., їх іноді називають *правилами Фейнмана у координатному просторі*. Для більшості обчислень простіше сформулювати ці правила в імпульсно-му просторі, застосувавши перетворення Фур'є до кожного пропагатора:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (4.46)$$

Зобразимо це на діаграмі, поставивши у відповідність 4-імпульс  $p$  кожному пропагатору і вказавши напрямок стрілкою. (Оскільки  $D_F(x-y) = D_F(y-x)$ , то напрямок імпульсу  $p$  довільний.) Тоді, якщо чотири лінії зустрічаються у вершині, то  $z$ -залежні множники діаграми є

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &\leftrightarrow \int d^4 z e^{-ip_1 \cdot z} e^{-ip_2 \cdot z} e^{-ip_3 \cdot z} e^{+ip_4 \cdot z} = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Інакше кажучи, імпульс зберігається в кожній вершині. Дельта-функції у вершинах тепер можна використати для взяття деяких інтегралів по імпульсах у пропагаторах. Відтак ми маємо *правила Фейнмана в імпульсному просторі*:

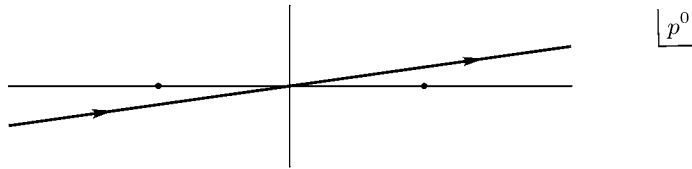
1. Для кожного пропагатора,  $\text{Diagram} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon};$
2. Для кожної вершини,  $\text{Diagram} = -i\lambda;$
3. Для кожної зовнішньої точки,  $\text{Diagram} = e^{-ip \cdot x};$
4. Вимагати збереження імпульсу в кожній вершині;
5. Інтегрувати по кожному невизначеному імпульсу:  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4};$
6. Розділити на фактор симетрії.

Ми знову можемо інтерпретувати кожен множник, як амплітуду тієї чи іншої частини процесу, а інтегрування впливає з принципу суперпозиції. Експоненційний множник для зовнішньої точки є достоту амплітудою того, що частка в цій точці має заданий імпульс, або, залежно від напрямку стрілки, що частку з певним імпульсом буде виявлено в цій точці.

Це майже завершує наш розгляд обчислення кореляційних функцій, проте залишається ще кілька нез'ясованих моментів. Насамперед, що сталося з великим відрізком часу  $\tau$ , що був узятий у вигляді  $\infty(1 - i\varepsilon)$ ? У поточному параграфі ми цілком знехтували ним, починаючи з рівняння (4.43). Нагоду повернутися до цього питання дає вираз (4.47), де замість простого інтегрування по  $d^4z$  ми б отримали

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \int_{-\tau}^{\tau} dz^0 \int d^3\mathbf{z} e^{-ip_1 \cdot z} e^{-ip_2 \cdot z} e^{-ip_3 \cdot z} e^{+ip_4 \cdot z}.$$

Експонента розбігається при  $z^0 \rightarrow \infty$  або  $z^0 \rightarrow -\infty$ , за винятком випадку, коли її аргумент є суто уявною величиною. Щоб досягти цього, можна взяти кожен компонент  $p^0$  з малою уявною частиною:  $p^0 \propto (1 + i\varepsilon)$ . Але ж саме так ми вчинили при визначенні граничних умов Фейнмана для обчислення  $D_F$ . Ми інтегруємо по контуру, який трохи зсунутий від дійсної осі таким чином, що  $p^0 \propto (1 + i\varepsilon)$ :



При переході до межі  $\tau \rightarrow \infty$  у попередньому виразі явна залежність від  $\tau$ , здавалося б, зникає. Проте розгляньмо діаграму

(4.48)

Дельта-функція в лівій вершині має вигляд  $(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2)$ , тож збереження імпульсу в правій вершині автоматично виконується, і ми отримуємо  $(2\pi)^4 \delta(0)$ . Походження цього незграбного множника легко зрозуміти, повернувшись до координатного простору. Він є просто інтегралом від константи по  $d^4w$ :

$$\int d^4w (\text{const}) \propto (2\tau) \cdot (\text{об'єм простору}). \quad (4.49)$$

це означає, що просторово-часовий процес (4.48) може відбутися у будь-якому місці простору і в будь-який момент часу з проміжку  $[-\tau, \tau]$ . Кожна незв'язна частина діаграми, тобто така, що не поєднана з зовнішньою точкою, матиме один множник  $(2\pi)^4 \delta(0) = 2\tau \cdot V$ .

Внески в кореляційну функцію від таких діаграм можна краще зрозуміти за допомогою дуже красивої тотожності, експоненціювання незв'язних діаграм. Воно працює наступним чином. Типова діаграма має вигляд

$$\left( \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \bigcirc \text{---} y \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \right) \quad (4.50)$$

і складається з частини, що зв'язана з  $x$  і  $y$ , а також кількох незв'язних частин. (Оскільки кожна вершина має парне число вхідних ліній, то точки  $x$  та  $y$  мають бути поєднані між собою.) Позначимо різні можливі незв'язні частини, як  $V_i$ .

$$V_i \in \left\{ \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots \right\} \quad (4.51)$$

Елементи  $V_i$  внутрішньо поєднані, але відокремлені від зовнішніх точок. Припустимо, що діаграма на зразок (4.50) має  $n_i$  частин вигляду  $V_i$  для кожного  $i$ , крім тієї частини, що поєднує  $x$  та  $y$ . (У будь-якій діаграмі лише скінченна кількість  $n_i$  відрізнятиметься від нуля.) Якщо ми через  $V_i$  позначимо також внесок частини  $V_i$ , то внесок цілої діаграми є

$$\left( \begin{array}{c} \text{внесок} \\ \text{зв'язної частини} \end{array} \right) \times \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i}.$$

Множник  $1/n_i!$  є фактором симетрії, що походить від перестановок  $n_i$  копій  $V_i$ . А сума всіх діаграм, які представляють чисельник нашої формули для двоточкової кореляційної функції, є

$$\sum_{\substack{\text{всі можливі} \\ \text{зв'язні частини}}} \sum_{\text{всі } \{n_i\}} \left( \begin{array}{c} \text{внесок} \\ \text{зв'язної частини} \end{array} \right) \times \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right),$$

де „всі  $\{n_i\}$ “ означає „всі упорядковані набори  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  невід'ємних цілих чисел“. Сума зв'язних частин виносить за дужки і дає

$$= \left( \sum \text{зв'язні} \right) \times \sum_{\text{всі } \{n_i\}} \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right),$$

де  $(\sum \text{ зв'язні})$  є скороченим позначенням для суми внесків усіх зв'язних частин. Неважко перекоонатися, що решту цього виразу можна розкласти на множники (спробуйте проробити у зворотному порядку):

$$\begin{aligned}
 &= \left( \sum \text{ зв'язні} \right) \times \left( \sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} V_1^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} V_2^{n_2} \right) \left( \sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} V_3^{n_3} \right) \dots = \\
 &= \left( \sum \text{ зв'язні} \right) \times \prod_i \left( \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) = \\
 &= \left( \sum \text{ зв'язні} \right) \times \prod_i \exp(V_i) = \\
 &= \left( \sum \text{ зв'язні} \right) \times \exp \left( \sum_i V_i \right). \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

Щойно ми показали, що сума всіх діаграм дорівнює сумі всіх зв'язних діаграм, помноженій на експоненту від суми всіх незв'язних діаграм. (Ми мали б говорити „частини“ замість „діаграми“ праворуч від знаку рівності, проте надалі часто називатимемо окрему частину теж діаграмою.) Графічно то-тожність має вигляд

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \\
 = \left( \text{---} + \text{---} \bigcirc + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \right) \times \\
 \times \exp \left[ \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Тепер розглянемо *знаменник* формули (4.31) для двоточкової функції. Вдавшись до тих самих аргументів, що й вище, отримаємо

$$\langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \exp \left[ \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right].$$

Ця експонента скорочується з експонентою від незв'язних діаграм у чисельнику. Остаточно спрощена формула набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle &= \left( \begin{array}{c} \text{сума всіх зв'язних діаграм} \\ \text{з двома зовнішніми точками} \end{array} \right) = \\
 &= \text{---} + \text{---} \bigcirc + \text{---} \bigcirc \bigcirc + \dots \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

Ми пройшли досить довгий шлях від початкового виразу (4.31).

Позбувшись незв'язних діаграм у формулі для кореляційної функції, ми можемо на хвилю зробити паузу, щоб озирнутися назад і дати цим діаграмам фізичну інтерпретацію. Погляньмо знову на формулу (4.30), яку можна переписати, як

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right] \} | 0 \rangle = \\ = \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (| \langle 0 | 0 \rangle |^2 e^{-iE_0(2\tau)}).$$

Розглядаючи з обох сторін рівності лише залежні від  $\tau$  частини, маємо

$$\exp \left[ \sum_i V_i \right] \propto \exp \left[ -iE_0(2\tau) \right] \quad (4.55)$$

Оскільки кожна незв'язна діаграма містить множник  $(2\pi)^4 \delta(0) = 2\tau \cdot (\text{об'єм})$ , це дає нам формулу для питомої енергії вакууму (відносно нульового значення енергії, визначеного умовою  $H_0|0\rangle = 0$ ):

$$\frac{E_0}{(\text{об'єм})} = i \left[ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right] / [(2\pi)^4 \delta(0)]. \quad (4.56)$$

Маємо відзначити, що права частина рівності не залежить від  $\tau$  і об'єму; зокрема, ми доходимо обнадійливого висновку, що  $E_0$  пропорційна об'єму простору. У Розділі 11 (Том II) ми виявимо, що ця формула справді корисна.

Це завершує наш аналіз двоточної кореляційної функції. Узагальнення на вищі кореляційні функції очевидне:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \left( \begin{array}{c} \text{сума всіх зв'язних діаграм} \\ \text{з } n \text{ зовнішніми точками} \end{array} \right). \quad (4.57)$$

Незв'язні діаграми експоненціюються, факторизуються і скорочуються за схожою процедурою. Проте наразі можлива плутанина в термінології. Під „незв'язними“ ми розуміємо діаграми, *відокремлені від усіх зовнішніх точок* — точно ті ж самі діаграми, що і в (4.51). (Вони іноді називаються „вакуумними бульбашками“ або „переходами вакуум-вакуум“.) У вищих кореляційних функціях діаграми можуть бути незв'язними також і в іншому розумінні. Розглянемо, до прикладу, чотириточкову функцію

$$\langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \dots \\ + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \dots$$

$$+ \text{diagram} + \dots + \text{diagram} + \dots \quad (4.58)$$

У багатьох цих діаграмах зовнішні точки не поєднані з усіма іншими. Такі діаграми не експоненціюються і не факторизуються; вони дають внесок до амплітуди так само, як цілком зв'язні діаграми (у яких від кожної точки можна дійти до будь-якої іншої уздовж ліній).

Зауважимо, що в теорії  $\phi^4$  всі кореляційні функції від непарного числа полів дають нуль, а отже, неможливо намалювати припустиму діаграму з непарною кількістю зовнішніх точок. У цьому можна перекоонатися звернувшись до теореми Віка: гамільтоніан взаємодії  $H_I$  містить парне число полів, тому всі члени пертурбативного ряду непарної кореляційної функції матимуть непарне число полів. Проте неможливо повністю згорнути непарне число полів у пари — а ненульове вакуумне середнє дають лише повністю згорнуті члени.

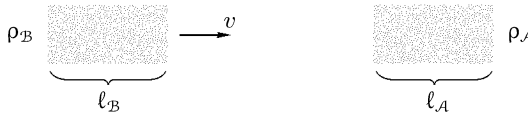
## § 4.5. Переріз розсіяння і $S$ -матриця

Тепер ми маємо надзвичайно красиву формулу (4.57) для обчислення винятково абстрактної величини —  $n$ -точкової кореляційної функції. Нашою наступною задачею є знаходження в рівній мірі красивого способу обчислення величин, які піддаються безпосередньому вимірюванню: це перерізи розсіяння та ширини розпаду. У цьому параграфі, після короткого огляду цих величин, ми зіставимо їх (не вдаючись у зайві формальності, але на достатньому рівні строгості) з примітивнішою величиною —  $S$ -матрицею. А в наступному параграфі навчимося обчислювати елементи  $S$ -матриці з використанням фейнманових діаграм.

### Переріз розсіяння

Експерименти, що вивчають поведінку елементарних часток, особливо в релятивістському режимі, є експериментами з розсіяння. У дослідях зіштовхують два пучки часток з чітко визначеними імпульсами і спостерігають за результатом. Імовірність отримання будь-якого окремого кінцевого стану можна виразити через *переріз розсіяння* — величину, яка є власною характеристикою зіштовхнутих часток, а отже, дозволяє порівняти два різні експерименти з пучками різних розмірів та інтенсивностей.

Переріз розсіяння визначається наступним чином. Розглянемо мішень у спокої, що складається з часток типу  $\mathcal{A}$  з густиною  $\rho_{\mathcal{A}}$  (число часток на одиницю об'єму). Спрямуємо на цю мішень пучок часток  $\mathcal{B}$  з густиною  $\rho_{\mathcal{B}}$  і швидкістю  $v$ .



Нехай  $\ell_{\mathcal{A}}$  і  $\ell_{\mathcal{B}}$  — довжини пучків часток. Тоді ми сподіваємося, що повне число подій розсіяння (або подій розсіяння будь-якого вказаного типу) має бути пропорційним  $\rho_{\mathcal{A}}$ ,  $\rho_{\mathcal{B}}$ ,  $\ell_{\mathcal{A}}$ ,  $\ell_{\mathcal{B}}$  і площі  $A$  перетину обох пучків. *Переріз розсіяння*, позначений як  $\sigma$ , дорівнює загальному числу подій (того або іншого типу), розділеному на добуток усіх цих величин:

$$\sigma \equiv \frac{\text{Число подій розсіяння}}{\rho_{\mathcal{A}} \rho_{\mathcal{B}} \ell_{\mathcal{A}} \ell_{\mathcal{B}} A} \quad (4.59)$$

Це визначення є симетричним відносно  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$ , тому ми могли б розглядати частки  $\mathcal{B}$  у стані спокою, або взагалі працювати в довільній системі відліку.

Переріз розсіяння має розмірність площі. Насправді це є ефективна площа ділянки одного пучка, потрапляючи до якої, частки іншого пучка зазнають розсіяння у вказаний кінцевий стан.

В реальних пучках  $\rho_{\mathcal{A}}$  і  $\rho_{\mathcal{B}}$  не є константами; густина часток у центрі пучка зазвичай більша, ніж скраю. Проте ми будемо припускати, що як радіус взаємодії часток, так і ширина окремих хвильових пакетів часток малі порівняно з діаметром пучка. Тож у подальшому вважатимемо  $\rho_{\mathcal{A}}$  і  $\rho_{\mathcal{B}}$  сталими, хоча не будемо забувати про те, що для обчислення ймовірності подій у реальному прискорювачі треба проінтегрувати по площі пучка:

$$\text{Число подій} = \sigma \ell_{\mathcal{A}} \ell_{\mathcal{B}} \int d^2 \mathbf{x} \rho_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \rho_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}). \quad (4.60)$$

Якщо  $\rho_{\mathcal{A}}$  і  $\rho_{\mathcal{B}}$  незмінні, або якщо ми застосовуємо цю формулу для обчислення ефективної площі  $A$  пучків, то ми маємо просто

$$\text{Число подій} = \frac{\sigma N_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{B}}}{A}, \quad (4.61)$$

де  $N_{\mathcal{A}}$  і  $N_{\mathcal{B}}$  є загальною кількістю часток  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$ .

Перерізи багатьох різних процесів можуть бути отримані з одного експерименту розсіяння. Наприклад, у зіткненнях  $e^+e^-$  можна виміряти перерізи утворення  $\mu^+\mu^-$ ,  $\tau^+\tau^-$ ,  $\mu^+\mu^-\gamma$ ,  $\mu^+\mu^-\gamma\gamma$  і т. д., а також незчислених процесів народження адронів, не кажучи вже про звичайне  $e^+e^-$  розсіяння. Як правило, ми хочемо знати не тільки те, які частки присутні в кінцевому стані, а й їхні імпульси. У цьому разі наше визначення (4.59) для перерізу  $\sigma$  ще справедливе, проте при встановленні точних значень імпульсів  $\sigma$  перетворюється на нескінченно малу величину. Вихід у тому, щоб визначити *диференціальний переріз розсіяння*  $d\sigma/(d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_n)$ . Це величина, яка при інтегруванні по довільному малому об'єму  $d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_n$  дає переріз розсіяння



в цей об'єм імпульсів кінцевого стану. Значення цих імпульсів не є незалежними; чотири компонента завжди будуть пов'язані умовою збереження 4-імпульсу. У найпростішому випадку, коли в кінцевому стані присутні тільки дві частки, ця умова залишає тільки два незалежні компоненти імпульсу, за які звичайно обирають кути  $\theta$  та  $\phi$  імпульсу однієї з часток. Інтегрування  $d\sigma/(d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2)$  по чотирьох обмежених законом збереження компонентах імпульсу дає звичайний диференціальний переріз  $d\sigma/d\Sigma$ .

Простішою вимірюваною величиною є *ширина розпаду*  $\Gamma$  нестабільної частки  $\mathcal{A}$  (початково нерухомої) у певний кінцевий стан (з двох або більше часток). Ця величина визначається, як

$$\Gamma \equiv \frac{\text{Число розпадів за одиницю часу}}{\text{Число наявних часток типу } \mathcal{A}}. \quad (4.62)$$

Тоді час життя  $\tau$  є оберненим до суми її ширини розпаду в усі можливі кінцеві стани. (Час напіврозпаду частки є  $\tau \cdot \log 2$ .)

У нерелятивістській квантовій механіці нестабільний атомний стан виявляє себе в експериментах з розсіяння як *резонанс*. Поблизу резонансної енергії  $E_0$  амплітуда розсіяння дається формулою Брейта–Вігнера:

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}. \quad (4.63)$$

А отже, переріз розсіяння має пік вигляду

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Ширина піку резонансу дорівнює ширині розпаду нестабільного стану (звідси, власне, й виникла назва для  $\Gamma$ ).

Формула Брейта–Вігнера (4.63) справедлива також і в релятивістській квантовій механіці. Зокрема, вона дає амплітуду розсіяння для процесів, у яких нестабільні частки утворюють комбіновану частку, що потім розпадається. Нестабільна частка, інтерпретована як збурений стан вакууму, є прямим аналогом нестабільного нерелятивістського атомного стану. Якщо задати 4-імпульс нестабільної частки  $p$  масою  $m$ , ми можемо отримати релятивістськи-інваріантне узагальнення виразу (4.63):

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \approx \frac{1}{2E_p[p^0 - E_p + i(m/E_p)\Gamma/2]}. \quad (4.64)$$

Швидкість розпаду нестабільної частки у довільній системі відліку є  $(m/E_p)\Gamma$ , що узгоджується з релятивістським подовженням часу. Хоча обидва вирази у (4.64) однакові поблизу резонансу, ліва частина рівняння, яка є явно лоренц-інваріантною, значно зручніша.

### S-матриця

Як нам тепер обчислити переріз розсіяння? Ми маємо утворити хвильові пакети, що представляють частки у початковому стані, подіяти на цей початковий стан упродовж тривалого часу оператором еволюції  $\exp(-iHt)$  для теорії поля із взаємодією, а потім накласти отриманий у підсумку кінцевий стан на хвильові пакети, що описують очікуваний набір розбіжних часток у кінцевому стані. Це дає амплітуду утворення такого кінцевого стану, яка має просте співвідношення з перерізом розсіяння. Ми виявимо, що в межі, коли хвильові пакети дуже вузькі в імпульсному просторі, амплітуда залежить лише від імпульсу хвильових пакетів, а не від їх конкретної форми.<sup>17</sup>

Хвильовий пакет, що представляє певний очікуваний стан  $|\phi\rangle$ , можна записати, як

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \phi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \quad (4.65)$$

де  $\phi(\mathbf{k})$  є перетворенням Фур'є просторової хвильової функції, а  $|\mathbf{k}\rangle$  — одночастковим станом з імпульсом  $k$  в теорії із взаємодією. У вільній теорії ми мали б  $|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_k} a_{\mathbf{k}}^\dagger$ . Множник  $\sqrt{2E_k}$  змінює наше релятивістське нормування  $|\mathbf{k}\rangle$  на звичайне, у якому сума всіх імовірностей дає 1:

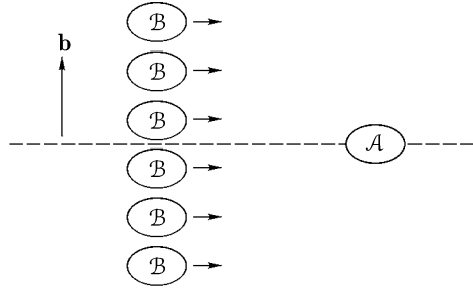
$$\langle\phi|\phi\rangle = 1, \quad \text{якщо} \quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |\phi(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (4.66)$$

Імовірність, яку ми хочемо обчислити,

$$\mathcal{P} = \left| \underbrace{\langle\phi_1\phi_2\cdots|}_{\text{майбутнє}} \underbrace{|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle}_{\text{минуле}} \right|^2, \quad (4.67)$$

де  $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$  є станом двох хвильових пакетів, утворених у далекому минулому, а  $\langle\phi_1\phi_2\cdots|$  — станом кількох хвильових пакетів (по одному для кожної кінцевої частки) у далекому майбутньому. Хвильові пакети локалізовані у просторі, тому кожен з них може бути утворений незалежно від інших. Такі стани називаються *in*- і *out*-станами. Зауважимо, що ми працюємо в картині Гайзенберга — стани не залежать від часу, проте назви, які ми їм даємо, обумовлені власними значеннями (або середніми значеннями) залежних від часу операторів. Таким чином, стани з різними назвами, утворені в різний час, мають нетривіальний перетин (взаємну проекцію), що визначається часовою залежністю операторів.

<sup>17</sup> Більша частина цього параграфу базована на викладі нерелятивістської теорії розсіяння, наведеного в книзі Тейлора [56], у Розділах 2, 3 і 17. Ми зосереджуємося на додаткових ускладненнях у релятивістській теорії, оминаючи увагою багато спільних для обох випадків моментів, які детально розглянуті Тейлором.



**Рис. 4.2.** Початкові хвильові пакети однорідно розподілені за прицільним параметром  $\mathbf{b}$ .

Якщо ми приготуємо  $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$  у віддаленому минулому, а потім перейдемо до межі, у якій хвильові пакети  $\phi_i(\mathbf{k}_i)$  будуть зосереджені поблизу вказаних імпульсів  $\mathbf{p}_i$ , то це визначить  $in$ -стан  $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{in}$  із вказаними початковими імпульсами. Зручно розглядати  $|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle$ , як лінійну суперпозицію таких станів. Проте важливо врахувати поперечний зсув хвильового пакета  $\phi_{\mathcal{B}}$  відносно  $\phi_{\mathcal{A}}$  в координатному просторі (Рис. 4.2). Хоча це можна неявно врахувати у вигляді пакета  $\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$ , ми натомість домовимося, що наші базові хвильові функції в імпульсному просторі є колінеарними (тобто мають прицільний параметр  $\mathbf{b} = 0$ ), і запишемо  $\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$  з явним множником  $\exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_{\mathcal{B}})$ , який враховує просторову трансляцію. А оскільки хвильові пакети  $\phi_{\mathcal{A}}$  і  $\phi_{\mathcal{B}}$  утворені незалежно в різних ділянках простору, то ми можемо записати початковий стан, як

$$|\phi_{\mathcal{A}}\phi_{\mathcal{B}}\rangle_{in} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{\mathcal{A}})\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_{\mathcal{B}}}}{\sqrt{(2E_{\mathcal{A}})(2E_{\mathcal{B}})}} |\mathbf{k}_{\mathcal{A}}\mathbf{k}_{\mathcal{B}}\rangle_{in}. \quad (4.68)$$

Ми могли б розкласти  $\langle\phi_1\phi_2\cdots|$  за так само визначеними  $out$ -станами із вказаними імпульсами в асимптотичному майбутньому:<sup>18</sup>

$${}_{out}\langle\phi_1\phi_2\cdots| = \left( \prod_f \int \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2E_f}} \right) {}_{out}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|.$$

Проте набагато простіше використати  $out$ -стани із вказаними імпульсами, як кінцеві стани в амплітуді ймовірності (4.67) і помножити їх на різні нормовочні множники після піднесення амплітуди до квадрату. Це фізично обґрунтовано доти, доки детектори часток кінцевого стану здебільшого ви-

<sup>18</sup>Тут і нижче знак добутку застосовується (символічно) до інтеграла так само, як і до решти множників у дужках; інтеграли також застосовуються до множників поза дужками.

мірюють імпульс — тобто визначають координати з точністю не більше дебройлевої довжини хвилі.

Тепер ми можемо зіставити ймовірність розсіяння в реальному експерименті з набором ідеалізованих амплітуд переходу між асимптотично визначеними *in*- і *out*-станами із вказаними імпульсами:

$${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}}. \quad (4.69)$$

Щоб обчислити перетин *in*- і *out*-станів, зазначимо, що домовленості для визначення двох наборів станів пов'язані трансляцією в часі:

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots |}_{\tau} \underbrace{|\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle}_{-\tau} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | e^{-iH(2\tau)} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.70)$$

В останньому рядку стани визначені в будь-який спільний для обох момент часу. Отже, *in*- і *out*-стани пов'язані межею послідовності унітарних операторів. Цей граничний унітарний оператор називається *S-матрицею*:

$${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} \equiv \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | S | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \quad (4.71)$$

S-матриця має наступну структуру. Якщо частки взагалі не взаємодіють, то S є просто одиничним оператором. Навіть у теорії із взаємодією частки мають деяку ймовірність пропустити одна одну. Для виокремлення нетривіальної частини S-матриці, тобто такої, що зумовлена взаємодією, визначимо *T-матрицю* таким чином:

$$S = \mathbf{1} + iT. \quad (4.72)$$

Далі зазначимо, що елементи S мають відображати збереження 4-імпульсу. Отже, S або T завжди містять множник  $\delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$ . Виокремлюючи його, ми визначаємо *інваріантний матричний елемент*  $\mathcal{M}$ :

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | iT | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f) \cdot i\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f). \quad (4.73)$$

Ми записали цей вираз через 4-імпульси  $p$  і  $k$ , але, певна річ, усі 4-імпульси перебувають на масовій поверхні:  $p^0 = E_p$ ,  $k^0 = E_k$ . (Зауважимо, що наш розгляд стосується випадку, коли в початковому стані є лише дві частки. Для процесів  $3 \rightarrow \text{багато}$  або  $\text{багато} \rightarrow \text{багато}$  можна побудувати схожі схеми, проте в цьому курсі ми не торкатимемося таких складних експериментів.)

Матричний елемент  $\mathcal{M}$  аналогічний амплітуді розсіяння  $f$  в одночастковій квантовій механіці. Він корисний, оскільки дозволяє відокремити ту

фізику, що обумовлена конкретною формою гамільтоніана взаємодії („динаміку“), від непов’язаної з особливостями взаємодії фізичної картини („кінематики“). У наступному параграфі ми обговоримо, як обчислити матричний елемент  $\mathcal{M}$ , скориставшись фейнмановими діаграмами. Та передовсім треба зрозуміти, як отримати переріз розсіяння  $\sigma$ , маючи  $\mathcal{M}$ .

Для цього виведемо через  $\mathcal{M}$  імовірність переходу початкового стану  $|\Phi_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{B}}\rangle$  у кінцевий стан з  $n$  часток, чиї імпульси знаходяться в малій ділянці  $d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_n$ . У нашому нормуванні ця ймовірність

$$\mathcal{P}(\mathcal{AB} \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left( \prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \Phi_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{B}} \rangle|^2. \quad (4.74)$$

Для одиночної частки-мішені  $\mathcal{A}$ , на яку налітають багато часток  $\mathcal{B}$  з різними прицільними параметрами  $\mathbf{b}$ , число подій розсіяння дається виразом

$$N = \sum_{\substack{\text{всі падаючі} \\ \text{частки } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2\mathbf{b} n_{\mathcal{B}} \mathcal{P}(\mathbf{b}),$$

де  $n_{\mathcal{B}}$  є густиною часток  $\mathcal{B}$  (їхньою кількістю на одиницю площі). Оскільки ми припускаємо, що ця густина незмінна по всьому радіусу взаємодії, то  $n_{\mathcal{B}}$  можна винести за межі інтеграла. Тоді переріз розсіяння

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2\mathbf{b} \mathcal{P}(\mathbf{b}). \quad (4.75)$$

Отримання простого виразу для  $\sigma$  через  $\mathcal{M}$  наразі стає справою прямих обчислення. Поєднавши (4.75), (4.74), (4.68) і записавши  $d\sigma$  замість  $\sigma$  (оскільки це є інфінітезимальна величина), маємо

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left( \prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \times \\ &\times \int d^2\mathbf{b} \left( \prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{\mathbf{k}}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\bar{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}} \right) \times \\ &\times e^{i\mathbf{b} \cdot (\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}_{\mathcal{B}})} \left( \text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}} \right) \left( \text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{\text{in}} \right)^*, \end{aligned} \quad (4.76)$$

де ми використали  $\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}$  і  $\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}$  як допоміжні змінні інтегрування у другій частині піднесеної до квадрату амплітуди. Інтеграл по  $d^2\mathbf{b}$  зводиться до множення на  $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}^{\perp})$ . Ми матимемо більше дельта-функцій, записавши останні два множники у (4.76) через  $\mathcal{M}$ . Оскільки нас не цікавить тривіальний випадок розсіяння вперед, коли ніякої взаємодії не відбувається, ми

можемо відкинути **1** у (4.72) і записати ці множники як

$$\begin{aligned} \left( \text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}} \right) &= i\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\}) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum k_i - \sum p_f\right); \\ \left( \text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{\text{in}} \right)^* &= -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\} \rightarrow \{p_f\}) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum \bar{k}_i - \sum p_f\right) \end{aligned}$$

Другу з цих дельта-функцій можна використати разом з  $\delta^{(2)}(\mathbf{k}_B^\perp - \bar{\mathbf{k}}_B^\perp)$  для проведення всіх шести інтегрування по  $\bar{\mathbf{k}}$  в (4.76). З цих шести інтегралів лише два — по  $\bar{k}_A^z$  і  $\bar{k}_B^z$  — вимагають певних зусиль:

$$\begin{aligned} \int d\bar{k}_A^z d\bar{k}_B^z \delta(\bar{k}_A^z + \bar{k}_B^z - \sum p_f^z) \delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum E_f) &= \\ = \int d\bar{k}_A^z \delta\left(\sqrt{\bar{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}_B^2 + m_B^2} - \sum E_f\right) \Big|_{\bar{k}_B^z = \sum p_f^z - \bar{k}_A^z} &= \\ = \frac{1}{\left| \frac{\bar{k}_A^z}{\bar{E}_A} - \frac{\bar{k}_B^z}{\bar{E}_B} \right|} \equiv \frac{1}{|v_A - v_B|}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

В останньому рядку на  $\bar{k}$  та  $\bar{E}$  накладено умови:  $\bar{k}_A^z + \bar{k}_B^z = \sum p_f^z$  і  $\bar{E}_A + \bar{E}_B = \sum E_f$  (на додаток до умов  $\bar{k}_A^\perp = k_A^\perp$  і  $\bar{k}_B^\perp = k_B^\perp$ , що виникають в інших чотирьох інтегралах). Різниця  $|v_A - v_B|$  є відносною швидкістю пучків у лабораторній системі відліку.

Нагадаємо, що початкові хвильові пакети локалізовані в імпульсному просторі поблизу  $\mathbf{p}_A$  і  $\mathbf{p}_B$ . Це означає, що ми можемо обчислити всі множники, які є гладкими функціями від  $\mathbf{k}_A$  і  $\mathbf{k}_B$ , у точках  $\mathbf{p}_A$  та  $\mathbf{p}_B$  і винести їх за межі інтегралів. Ці множники включають  $E_A$ ,  $E_B$ ,  $|v_A - v_B|$  і  $\mathcal{M}$  — усе, за винятком залишеної під інтегралом дельта-функції. Проробивши це, отримаємо вираз

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left( \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2}{2E_A \cdot 2E_B |v_A - v_B|} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} \times \\ &\times |\Phi_A(\mathbf{k}_A)|^2 |\Phi_B(\mathbf{k}_B)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum p_f). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Для подальшого спрощення цієї формули маємо трохи більше дізнатися про властивості реальних детекторів часток. Як ми вже відзначали, реальні детектори зорієнтовані передовсім на власні стани імпульсу. Проте ці детектори мають обмежену роздільну здатність, і зазвичай вимірювання імпульсів кінцевих станів не є настільки точним, щоб розрізнити малі відхилення, що спричинені розбіжністю імпульсів початкових хвильових пакетів  $\Phi_A, \Phi_B$ . У цьому випадку можна з прийнятним наближенням замінити

вектор імпульсу  $k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}}$  в дельта-функції його найімовірнішою величиною  $p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}}$ . З таким наближенням ми можемо взяти інтеграли по  $k_{\mathcal{A}}$  і  $k_{\mathcal{B}}$ , використавши умову нормування (4.66). Це дає остаточну форму співвідношення між елементами  $S$ -матриці та перерізом розсіяння:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \left( \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \times \quad (4.79)$$

$$\times |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f).$$

Отриманий вираз не залежить від форми хвильових пакетів.

Інтеграл по імпульсах кінцевих станів у (4.79) має структуру:

$$\int d\Pi_n = \left( \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum p_f), \quad (4.80)$$

з повним початковим 4-імпульсом  $P$ . Цей інтеграл є явно лоренц-інваріантним, бо складається з інваріантних інтегралів по 3-імпульсах, пов'язаних однією дельта-функцією від 4-імпульсів. Цей інтеграл відомий як *релятивістськи-інваріантний  $n$ -частковий фазовий об'єм*. Серед інших складових у (4.79) матричний елемент  $\mathcal{M}$  також є лоренц-інваріантним. Отже, трансформаційні властивості (4.79) цілком визначаються множителем

$$\frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} = \frac{1}{|E_{\mathcal{B}} p_{\mathcal{A}}^z - E_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{B}}^z|} = \frac{1}{|\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} p_{\mathcal{A}}^\mu p_{\mathcal{B}}^\nu|}.$$

Цей вираз не є лоренц-інваріантним, проте він інваріантний відносно бустів у напрямку осі  $z$  і має всі властивості перетворення площі перерізу.

В окремому випадку двох часток у кінцевому стані можна спростити загальну формулу (4.79), обчисливши частину інтегралів по фазовому об'єму в системі ЦМ. Позначимо імпульси двох кінцевих часток, як  $p_1$  і  $p_2$ . Спочатку проінтегруємо по всіх компонентах  $\mathbf{p}_2$  три дельта-функції, які вимагають збереження 3-імпульсу. В результаті маємо  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ , а відтак інтеграл по двочастковому фазовому простору перетворюється на

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1 p_1^2 d\Omega}{(2\pi)^3 2E_1 \cdot 2E_2} (2\pi) \delta(E_{\text{цм}} - E_1 - E_2), \quad (4.81)$$

де  $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$ ,  $E_2 = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$ , а  $E_{\text{цм}}$  є повна початкова енергія. Інтегрування останньої дельта-функції дає

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int d\Omega \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left( \frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right)^{-1} = \\ &= \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{цм}}}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Для реакцій, симетричних відносно осі зіткнення, двочастковий фазовий об'єм можна записати як інтеграл по полярному куту в системі ЦМ:

$$\int d\Pi_2 = \int d(\cos \theta) \frac{1}{16\pi^2} \frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{ЦМ}}}. \quad (4.83)$$

Останній множник прагне до 1 при великих енергіях.

Застосувавши це спрощення до (4.79), ми знаходимо наступний вигляд перерізу розсіяння для двох часток у кінцевому стані:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ЦМ}} &= \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} \cdot 2E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \times \\ &\times \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 \cdot 4E_{\text{ЦМ}}} |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow p_1, p_2)|^2. \end{aligned} \quad (4.84)$$

В окремому випадку, коли всі чотири частки мають однакові маси (включно з межею  $m \rightarrow 0$ ), останній вираз зводиться до формули, наведеної в Розділі 1:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ЦМ}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{ЦМ}}^2} \quad \text{всі чотири маси однакові.} \quad (4.85)$$

На завершення цього параграфу виведемо формулу для диференційної ширини розпаду  $d\Gamma$  через  $\mathcal{M}$ . Правильний вираз є лише незначною видозміною (4.79), і його досить легко вгадати — треба просто прибрати з (4.79) множники, які втрачають сенс, коли початковий стан складається з однієї частки. Визначення  $\Gamma$  стосується частки, що зазнає розпаду в стані спокою, тому нормувальний множник  $(2E_{\mathcal{A}})^{-1}$  перетворюється на  $(2m_{\mathcal{A}})^{-1}$ . (У будь-якій іншій системі відліку цей множник дав би звичайне уповільнення часу.) Отже, формула для ширини розпаду є

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left( \prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \times \\ &\times |\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - \sum p_f). \end{aligned} \quad (4.86)$$

На жаль, значення цієї формули не дуже ясне. Оскільки нестабільну частку не можна відправити в нескінченно віддалене минуле, наше визначення (4.73) для  $\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \rightarrow \{p_f\})$  через елементи S-матриці втрачає сенс. А проте, формула (4.86) є справедливою, якщо матриця  $\mathcal{M}$  обчислена за правилами Фейнмана для елементів S-матриці, які ми наведемо в наступному параграфі. Ми відкладаємо подальше обговорення цих питань і доведення (4.86)



до § 7.3. Доти задовольнимися інтуїтивним уявленням про  $\mathcal{M}$ , як амплітуду переходу.

Рівняння (4.79) і (4.86) є цілком загальними, незалежно від того, чи містить кінцевий стан тотожні частки. (Обчислення  $\mathcal{M}$  за наявності тотожних часток, певна річ, відрізнятиметься, але це вже інше питання.) При інтегруванні будь-якого з цих двох рівнянь для отримання *повного* перерізу розсіювання або ширини розпаду треба бути уважним, щоб уникнути повторного врахування того ж самого кінцевого стану. Якщо ми маємо  $n$  тотожних часток у кінцевому стані, то маємо або обмежитися інтегруванням по нееквівалентних конфігураціях, або ж розділити на  $n!$  після інтегрування по всіх можливих наборах імпульсів.

## § 4.6. Обчислення елементів $S$ -матриці з фейнманових діаграм

Тепер, коли ми маємо формули для перерізу розсіювання і ширини розпаду в термінах інваріантних матричних елементів  $\mathcal{M}$ , єдине, що нам залишається, це знайти спосіб обчислення  $\mathcal{M}$  для різних процесів у різних теоріях поля із взаємодією. У цьому параграфі ми випишемо (і спробуємо обґрунтувати) формулу для  $\mathcal{M}$  через фейнманові діаграми. Ми відкладемо її строге доведення до § 7.2, оскільки воно доволі технічне і стане значно легшим для розуміння після того, як ми побачимо цю формулу в дії.

Нагадаємо, що за визначенням з рівняння (4.71)  $S$ -матриця є оператором часової еволюції  $\exp(-iHt)$  у межі дуже великих значень  $t$ :

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | e^{-iH(2\tau)} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle. \quad (4.87)$$

Для обчислення цієї величини ми хотіли б замінити зовнішні стани плоских хвиль у (4.87), які є власними станами  $H$ , їхніми відповідниками в незбуреній теорії, які є власними станами  $H_0$ . Ми з успіхом зробили таку заміну для вакуумного стану  $|\Omega\rangle$  в рівнянні (4.27):

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} (e^{-iE_0\tau} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iH\tau} | 0 \rangle.$$

Наразі ми хотіли б знайти співвідношення вигляду

$$|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle \propto \lim_{\tau \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} e^{-iH\tau} |\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_0, \quad (4.88)$$

де вилучено невідомі фазові множники та коефіцієнти перекриття, на зразок тих, що присутні в (4.27). Знайти таке співвідношення непросто. У

(4.27) ми використали той факт, що вакуум є станом з абсолютно найнижчою енергією. Тут у нашому розпорядженні є лише набагато слабше твердження, що зовнішні стани з чітко розділеними початковими та кінцевими частками мають найнижчу енергію серед станів з наперед заданими ненульовими значеннями імпульсів. Ця проблема є досить глибокою, і вона пов'язана з однією з найфундаментальніших труднощів теорії поля, породженою тією обставиною, що взаємодія впливає не лише на розсіяння різнних часток, але й на форму самих одночасткових станів.

Якби формула (4.88) тим або іншим чином була отримана, ми могли б застосувати її, щоб переписати праву частину (4.87), як

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | e^{iH(2\tau)} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0 &\propto \\ &\propto \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | T \left( \exp \left[ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right] \right) | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

При обчисленні вакуумних середніх громіздкі пропорційні множники між вільним вакуумом та вакуумом із взаємодією скорочувалися в остаточному виразі (4.31). Наразі ці множники такі жахливі, що ми навіть не намагаємося виписати їх; сподіваємось лише, що таке ж драматичне скорочення матиме місце й тут. І справді, це скорочення відбувається, хоча при нашому підході отримати його дуже непросто. З точністю до невеликої модифікації (для наших цілей неістотної) формулу для нетривіальної частини S-матриці можна спростити до такого вигляду:

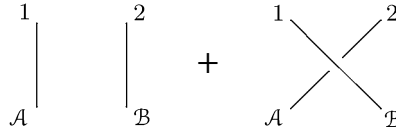
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle &= \\ = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right] \right\} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0 &\Big|_{\substack{\text{зв'язна,} \\ \text{ампутована}}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Терміни „зв'язна“ й „ампутована“ стосуються обмежень на клас можливих фейнманових діаграм і будуть визначені трохи згодом. Ми доведемо рівняння (4.90) у § 7.2. А в решті поточного параграфу пояснимо цю формулу і наведемо обґрунтування нових обмежень, що їх ми додали.

Насамперед маємо навчитися представляти матричний елемент у (4.90) як суму фейнманових діаграм. Обчислимо явно кілька перших членів у  $\phi^4$ -теорії для двох часток у кінцевому стані. Перший член є

$$\begin{aligned} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0 &= \sqrt{2E_1 \cdot 2E_2 \cdot 2E_A \cdot 2E_B} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_A \cdot 2E_B (2\pi)^6 [\delta(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_2) + \\ &\quad + \delta(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1)]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Наявність дельта-функції робить кінцевий стан тотожним початковому, тому цей член є частиною „1“ у  $S = 1 + iT$  і не дає внеску в матричний елемент розсіяння  $\mathcal{M}$ . Ми можемо представити це, як діаграми



Наступний член у  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle$ , з застосуванням теореми Віка, набуває вигляду

$$\begin{aligned} {}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T \left( -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \phi_I^4(x) \right) | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0 = \\ = {}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | N \left( -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \phi_I^4(x) + \text{згортки} \right) | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Оскільки зовнішні стани не є  $|0\rangle$ , то не повністю згорнуті доданки не конче нульові; ми можемо використати оператор знищення з  $\phi_I(x)$ , щоб анігілювати частку початкового стану, або оператор народження — щоб утворити частку кінцевого стану. Наприклад,

$$\begin{aligned} \phi_I^+ | \mathbf{p} \rangle_0 &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | 0 \rangle = \\ &= e^{-ip \cdot x} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Незгорнутий  $\phi_I$  під знаком  $N$ -добутку (4.92) має два доданки —  $\phi_I^+$  крайній справа і  $\phi_I^-$  крайній зліва. Ми отримуємо один внесок в елемент  $S$ -матриці для кожного способу комутування  $a$ , що міститься в  $\phi_I^+$ , з  $a^\dagger$  початкового стану і один внесок для кожного способу комутування  $a^\dagger$ , що міститься в  $\phi_I^-$ , з  $a$  кінцевого стану. Тоді природно буде визначити згортки польових операторів з зовнішніми станами наступним чином:

$$\overline{\phi_I(x) | \mathbf{p}} e^{-ip \cdot x}; \quad \langle \mathbf{p} | \phi_I(x) = e^{ip \cdot x}. \quad (4.94)$$

Для обчислення елемента  $S$ -матриці типу (4.92) просто запишемо всі можливі повні згортки операторів  $\phi_I$  з зовнішніми імпульсними станами.

Аби переконатися, що цей припис є правильним, прискіпливо обчислимо величину (4.92).  $N$ -добуток містить члени такого вигляду:

$$\phi\phi\phi\phi; \quad \overline{\phi\phi\phi\phi} \quad ; \quad \overline{\phi\phi\phi}\overline{\phi}. \quad (4.95)$$

Останній доданок, у якому оператори  $\phi$  цілком згорнуті одні з одними, дорівнює вакуумній бульбашковій діаграмі, помноженій на обчислену вище величину (4.91):

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \overline{\phi} \phi \overline{\phi} \phi | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = \\
 & = \infty \times \left( \begin{array}{c} 1 \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ B \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad B \end{array} \right). \quad (4.96)
 \end{aligned}$$

Це є ще одним внеском у тривіальну частину S-матриці, тому ми його ігноруємо.

Далі розглянемо другий член з (4.95), у якому два чотирьох операторів  $\phi$  згорнуті. Нормально упорядкований добуток решти двох полів має вигляд  $(a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + aa)$ . Шляхом комутування цих операторів з  $a$  та  $a^\dagger$  початкового та кінцевого станів ми знаходимо, що може вціліти лише член з однаковою кількістю  $a$  і  $a^\dagger$ . Мовою згорток це означає, що один з  $\phi$  має бути згорнутим з початковим станом  $|\mathbf{p}\rangle$ , а інший — з кінцевим станом  $\langle \mathbf{p}|$ . Незгорнуті  $|\mathbf{p}\rangle$  і  $\langle \mathbf{p}|$  дають дельта-функцію, як і в (4.91). Для діаграмного представлення цих величин ми додаємо до наших правил Фейнмана *зовнішні лінії*:

$$\overline{\phi}_I(x) |\mathbf{p}\rangle = \begin{array}{c} \nearrow x \\ \text{---} p \end{array} \quad |\mathbf{p}\rangle \phi_I(x) = \text{---} p \begin{array}{c} \nwarrow x \end{array} \quad (4.97)$$

Фейнманові діаграми для елементів S-матриці завжди міститимуть зовнішні лінії, на відміну від зовнішніх точок у діаграмах для кореляційних функцій. Таким чином, другий член з (4.95) дає чотири діаграми:

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ B \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ A \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ B \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad B \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \end{array}$$

Інтеграли  $\int d^4x$  призводять до появи в кожній вершині дельта-функцій, що встановлюють збереження імпульсів (включно з зовнішніми імпульсами), а отже, ці діаграми знов-таки описують тривіальні процеси, в яких початкові та кінцеві стани тотожні. Це ілюструє загальний принцип: внесок у T-матрицю дають лише *повністю зв'язні* діаграми, у яких зовнішні лінії поєднані між собою.

Нарешті розглянемо член з (4.95), у якому жоден з операторів  $\phi$  не згорнутий з іншим. Наш припис вимагає, щоб ми згорнули два оператори  $\phi$  з

$|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle$ , а решту два — з  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |$ . Існує  $4!$  способи зробити це. Звідси маємо діаграму

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ A \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ B \end{array} = (4!) \cdot \left( -i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^4x e^{-i(p_A + p_B - p_1 - p_2) \cdot x} = \\
 & = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2).
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Це точно збігається з виразом  $i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$ , де  $\mathcal{M} = -\lambda$ .

Перш ніж продовжити наше обговорення фейнманових діаграм для елементів  $S$ -матриці, варто зупинитися й застосувати цей результат до перерізу розсіяння. Для зіткнення часток у системі ЦМ ми можемо просто підставити  $|\mathcal{M}|^2 = \lambda^2$  у (4.85), і тоді отримаємо

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ЦМ}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{ЦМ}}^2}. \tag{4.99}$$

Щойно ми обчислили наш перший переріз розсіяння у квантовій теорії поля. Це досить слабкий результат, взагалі позбавлений кутової залежності. (Ситуація буде виправлена, коли в наступному параграфі ми розглянемо ферміони.) Проінтегрувавши по  $d\Omega$  і розділивши на 2, оскільки присутні дві тотожні частки у кінцевому стані, знаходимо повний переріз:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{ЦМ}}^2}. \tag{4.100}$$

На практиці, мабуть, можна було б використати цей результат для для вимірювання  $\lambda$ .

Повертаючись до основної теми нашого обговорення, розглянемо деякі внески в  $T$ -матрицю вищого порядку для процесу  $A, B \rightarrow 1, 2$ . Якщо тимчасово знехтувати приписом про зв'язні й ампутовані діаграми, то

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle \stackrel{?}{=} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} + \dots + \\
 & + \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bigcirc \end{array} \right) + \dots + \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \end{array} \right) + \dots + \\
 & + \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

плюс діаграми, у яких не всі чотири лінії поєднані між собою. Ми вже бачили, що цей останній клас діаграм не дає внеску в  $T$ -матрицю. Перша діаграма, показана в (4.101), дає внесок у  $T$  найнижчого порядку, який ми обчислили вище. Наступні три діаграми дають очікувані поправки до цієї амплітуди з урахуванням народження і знищення додаткових „віртуальних“ часток.

Діаграми у другому рядку (4.101) містять незв'язні „вакуумні бульбашки“. Вдавшись до тих самих аргументів, що й наприкінці § 4.4, можна експоненціювати незв'язні частини в загальний фазовий множник, що визначає зсув енергії вакуумного стану за наявності взаємодії. Тому такі частини діаграм є неістотними для S-матриці. Тепер ми бачимо, що лише повністю зв'язні діаграми дають суттєві внески в елементи S-матриці.

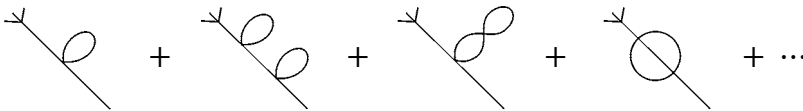
Остання діаграма значно проблемніша; обчислимо її. Після інтегрування по координатах двох вершин маємо

$$\begin{aligned}
 & \text{Діаграма: } \text{Вхідні лінії } p_1, p_2 \text{ зустрічаються в вершині, звідки виходить лінія з імпульсом } p'. \text{ Ця лінія замикається в петлю з імпульсом } k, \text{ яка знову зустрічається в вершині з вихідними лініями } p_A, p_B. \\
 & = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \times \\
 & \quad \times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p' - p_1 - p_2) \times \\
 & \quad \times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p').
 \end{aligned}
 \tag{4.102}$$

Ми можемо проінтегрувати по  $p'$ , використавши другу дельта-функцію. Це потребує від нас обчислення величини

$$\left. \frac{1}{p'^2 - m^2} \right|_{p'=p_B} = \frac{1}{p_B^2 - m^2} = \frac{1}{0}.$$

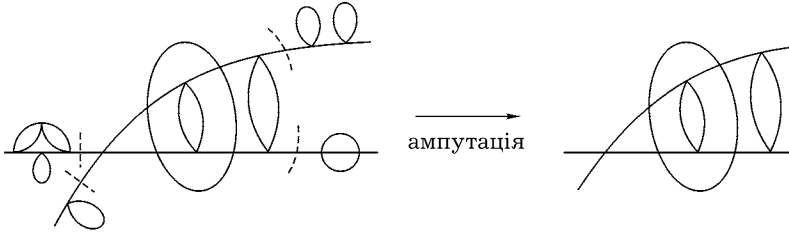
Ми отримали нескінченність, оскільки  $p_B$  є імпульсом зовнішньої частки і відповідає співвідношенню  $p_B^2 = m^2$ . Це створює труднощі. Зрозуміло, що наша формула для S має сенс лише за умови виключення діаграм з петлями на зовнішніх лініях. На щастя, це фізично виправдано — нарівні з тим, як вакуумні бульбашкові діаграми описують еволюцію  $|0\rangle$  в  $|\Omega\rangle$ , поправки до зовнішніх ліній



описують еволюцію  $|\mathbf{p}\rangle_0$  у  $|\mathbf{p}\rangle$ , який є одночастковим станом у теорії із взаємодією. Оскільки ці поправки не мають жодного стосунку до процесу розсіяння, їх треба виключити з обчислення S-матриці.

Для діаграми загального вигляду з зовнішніми лініями визначимо *ампутацію* наступним чином. Починаючи з кінця кожної зовнішньої лінії, знайдемо останню точку, де діаграма може бути розрізана по одному пропагатору так, щоб ця операція відокремила лінію від решти діаграми. Там і

розріжемо. Наприклад,



Підсумуємо наш припис для обчислення амплітуд розсіяння. Формулу для елементів  $S$ -матриці (4.90) можна переписати, як

$$i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \sum \mathbf{p}_f) = \left( \begin{array}{c} \text{сума всіх зв'язних ампутуваних діаграм} \\ \text{з вхідними } p_A, p_B \text{ й вихідними } p_f \end{array} \right). \quad (4.103)$$

Терміном „зв'язна“ ми тепер позначаємо повністю зв'язну діаграму, тобто таку, що не має вакуумних бульбашок, а всі її зовнішні лінії поєднані між собою. Правила Фейнмана для амплітуд розсіяння в теорії  $\phi^4$  у координатному просторі є такі:

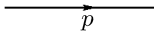
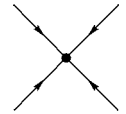

1. Для кожного пропагатора,  $x \text{---} y = D_F(x - y);$
2. Для кожної вершини,  $\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} x = (-i\lambda) \int d^4x;$
3. Для кожної зовнішньої лінії,  $\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} x \text{---} p = e^{-ip \cdot x};$
4. Розділити на фактор симетрії.

Зазначимо, що множником для вхідної лінії є якраз амплітуда знаходження частки у вершині, з якою ця лінія з'єднана, тобто це є хвильова функція частки. Так само, множник для вихідної лінії є амплітуда того, що частка, народжена у вершині, має певний кінцевий імпульс.

Як і з правилами Фейнмана для кореляційних функцій, зазвичай простіше запровадити імпульсне представлення пропагаторів, потім узяти вершинні інтеграли для отримання дельта-функцій, що забезпечують збереження імпульсу, після чого використати ці дельта-функції для обчислення якомога більшого числа інтегралів по імпульсах. Проте в амплітуді розсіяння завжди буде присутня спільна дельта-функція від суми всіх імпульсів, яку можна використати для скорочення дельта-функції, що стоїть у лівій частині (4.103). Тоді ми отримаємо

$$i\mathcal{M} = \text{сума всіх зв'язних ампутуваних діаграм}, \quad (4.104)$$

де діаграми обчислюються за наступними правилами:

1. Для кожного пропагатора,   $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon};$
2. Для кожної вершини,   $= -i\lambda;$
3. Для кожної зовнішньої лінії,   $= 1;$
4. Вимагати збереження імпульсу в кожній вершині;
5. Інтегрувати по кожному невизначеному імпульсу:  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4};$
6. Розділити на фактор симетрії.

Це наш остаточний варіант правил Фейнмана для теорії  $\phi^4$ .

Насправді формула (4.103) ще не зовсім точна. Їй необхідна додаткова модифікація з урахуванням пропорційних множників, які були вилучені з (4.89). Утім, ця модифікація стосується лише діаграм, що містять петлі, тому ми відкладаємо обговорення до Розділів 6 і 7, де спершу обчислимо такі діаграми. У § 7.2 ми доведемо справедливості виправленої формули (4.103), зіставляючи елементи  $S$ -матриці з кореляційними функціями, для яких практично вже отримали формулу в термінах фейнманових діаграм.

## § 4.7. Фейнманові правила для ферміонів

Досі в цьому розділі, задля уникнення зайвих ускладнень, ми розглядали лише теорію  $\phi^4$ . Тепер ми готові узагальнити результати на теорії з ферміонами.

Наше рішення для кореляційних функцій з § 4.2 узагальнюється без проблем. Лоренц-інваріантність вимагає, щоб гамільтоніан взаємодії  $H_I$  був добутком парного числа спінових полів, тож не виникає жодних складнощів при визначенні хронологічно впорядкованої експоненти від  $H_I$ .

Проте, для застосування теореми Віка треба поширити визначення хронологічного та нормального упорядкування на ферміони. Наприкінці § 3.5 ми бачили, що оператор хронологічного упорядкування  $T$ , який діє на два спінові поля, зручніше визначити з додатковим знаком мінус:

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) \equiv \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & \text{для } x^0 > y^0; \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & \text{для } x^0 < y^0. \end{cases} \quad (4.105)$$



За цим визначенням, пропагатор Фейнмана для діракового поля є

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle. \quad (4.106)$$

Для добутку понад двох спінових полів ми узагальнюємо це визначення природним чином: хронологічне упорядкування дає один знак мінус для кожної з операторних перестановок, необхідних для того, щоб розташувати поля у хронологічному порядку. Наприклад,

$$T(\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4) = (-1)^3 \psi_3 \psi_1 \psi_4 \psi_2, \quad \text{якщо } x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0.$$

Визначення нормально упорядкованого добутку спінових полів є аналогічним: треба поставити додатковий знак мінус для кожної перестановки ферміонів. Антикомутаційні співвідношення дозволяють записати нормально упорядкований добуток кількома способами, проте, з урахуванням наших домовленостей, вони цілком еквівалентні:

$$N(a_p a_q a_r^\dagger) = (-1)^2 a_r^\dagger a_p a_q = (-1)^3 a_r^\dagger a_q a_p.$$

Використавши ці визначення, неважко узагальнити теорему Віка. Розглянемо спочатку випадок двох діракових полів, скажімо,  $T[\psi(x) \bar{\psi}(y)]$ . За аналогією з (4.37), визначимо їх згортку, як

$$T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + \overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)}. \quad (4.107)$$

Очевидно, що для діракового поля,

$$\overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \equiv \begin{cases} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} & x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^-(y), \psi^+(x)\} & x^0 < y^0 \end{cases} = S_F(x-y); \quad (4.108)$$

$$\overline{\psi(x) \psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)} = 0. \quad (4.109)$$

Визначимо згортку під символом нормального упорядкування таким чином, щоб вони містили знаки мінус для оператора перестановок:

$$N(\overline{\psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4}) = -\overline{\psi_1 \bar{\psi}_3} N(\psi_2 \bar{\psi}_4) = -S_F(x_1 - x_3) N(\psi_2 \bar{\psi}_4). \quad (4.110)$$

За таких визначень теорема Віка має попередній вигляд:

$$T[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots] = N[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots + \text{всі можливі згортки}]. \quad (4.111)$$

Доведення суттєво не відрізняється від бозонного випадку, оскільки всі додаткові знаки мінус враховуються вищенаведеними визначеннями.

### Теорія Юкави

Тепер було б неважко виписати правила Фейнмана для ферміонних кореляційних функцій, але натомість ми відразу перейдемо до обговорення процесів розсіяння. Почнемо з аналізу теорії Юкави:

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3\mathbf{x} (g \bar{\psi}\psi\phi). \quad (4.112)$$

Це є спрощена модель квантової електродинаміки. У поточному параграфі ми ретельно виведемо правила обчислення в теорії Юкави, щоб надалі їх можна було без значних ускладнень застосувати до КЕД.

Для конкретності, розглянемо реакцію двочасткового розсіяння:

$$\text{ферміон } (p) + \text{ферміон } (k) \rightarrow \text{ферміон } (p') + \text{ферміон } (k').$$

Основний внесок дає  $H_I^2$  член у  $S$ -матриці:

$${}_0\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | T \left( \frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I (-ig) \int d^4y \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I \right) | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_0 \quad (4.113)$$

Для обчислення цього виразу використаємо теорему Віка, щоб звести  $T$ -добуток до  $N$ -добутку згорток, а потім подіяти незгорнутими полями на початкові та кінцеві стани часток. Представимо цей останній процес, як згортку

$$\begin{aligned} \overline{\psi_I(x) | \mathbf{p}, s} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s'} a_{\mathbf{p}'}^{s'} u^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}'}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle = \\ &= e^{-ip \cdot x} u^s(p) |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Подібні вирази мають місце для згортки  $\bar{\psi}_I$  з ферміоном кінцевого стану, а також для згорток  $\psi_I$  і  $\bar{\psi}_I$  з антиферміонними станами. Зазначимо, що  $\psi_I$  можна згорнути з ферміоном праворуч або з антиферміоном ліворуч; зворотне справедливо для  $\bar{\psi}_I$ .

Ми можемо записати типовий матричний елемент (4.113), як згортку

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}\psi\phi (-ig) \int d^4y \bar{\psi}\psi\phi | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle. \quad (4.115)$$

З точністю до можливого знаку мінус, значення цієї величини є

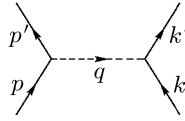
$$\begin{aligned} &(-ig)^2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta(k' - k + q) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k). \end{aligned}$$

(Ми опустили множник  $1/2!$ , бо є другий, ідентичний член, що походить від перестановки  $x$  та  $y$  в (4.115).) Використавши будь-яку дельта-функцію для інтегрування, знаходимо, що цей вираз має вигляд  $i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(\Sigma p)$ , де

$$i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p')u(p)\bar{u}(k')u(k). \quad (4.116)$$

Записуючи таким чином, маємо пам'ятати, що на імпульси накладено умову  $p - p' = q = k' - k$ .

Замість починати від (4.115), ми могли б зобразити фейнманову діаграму



Ми позначаємо скалярні частки пунктирними лініями, а ферміонні — суцільними. Елемент  $S$ -матриці можна було б отримати безпосередньо з наступних правил Фейнмана в імпульсному просторі.

#### 1. Пропагатори:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \text{---} \overset{q}{\text{---}} \text{---} = \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$$

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

#### 2. Вершини:

$$\text{---} \text{---} \text{---} = -ig$$

#### 3. Згортки з зовнішніми кінцями:

$$\overline{\phi|q} = \text{---} \text{---} \text{---} = 1$$

$$\langle q|\phi = \text{---} \text{---} \text{---} = 1$$

$$\underbrace{\overline{\psi|p, s}}_{\text{ферміон}} = \text{---} \text{---} \text{---} = u^s(p)$$

$$\underbrace{\langle p, s|\bar{\psi}}_{\text{ферміон}} = \text{---} \text{---} \text{---} = \bar{u}^s(p)$$

$$\underbrace{\bar{\psi}|p, s}_{\text{антиферміон}} = \text{---} \text{---} \text{---} = \bar{v}^s(k)$$

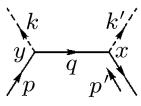
$$\underbrace{\langle p, s|\psi}_{\text{антиферміон}} = \text{---} \text{---} \text{---} = v^s(k)$$

4. Вимагати збереження імпульсу в кожній вершині.
5. Інтегрувати по кожному невизначеному імпульсу.
6. Отримати повний знак діаграми.

Маємо кілька коментарів щодо цих правил.

По-перше, зазначимо, що множник  $1/n!$  у ряді Тейлора для хронологічно впорядкованої експоненти завжди скорочується з  $n!$  способами перестановок вершин, що дають однакові згортки. Діаграми в теорії Юкави ніколи не мають факторів симетрії, оскільки три поля  $(\bar{\psi}\psi\phi)$  в  $H_I$  не можна підставити одне замість іншого при згортках.

По-друге, напрямок імпульсу на ферміонних лініях завжди є істотним. На зовнішніх лініях, як для бозонів, напрямок імпульсу завжди є вхідним для початкових станів і вихідним для кінцевих. Це безпосередньо впливає з рядів для  $\psi$  і  $\bar{\psi}$ , де оператори знищення  $a_p$  і  $b_p$  мають множники  $e^{-ip \cdot x}$ , а оператори народження  $a_p^\dagger$  і  $b_p^\dagger$  — множники  $e^{+ip \cdot x}$ . На внутрішніх ферміонних лініях (пропагаторах) імпульс має вказувати напрямок струму числа часток (для електронів це є напрямком струму негативного заряду). Цю вимогу найлегше побачити, виходячи з засадничих принципів. Розглянемо анігіляцію ферміона й антиферміона у два бозони:



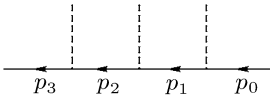
$$= \langle \mathbf{k}, \mathbf{k}' | \int d^4x \phi \bar{\psi} \psi \int d^4y \phi \bar{\psi} \psi | \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle \sim$$

$$\sim \int d^4x \int d^4y \bar{v}(p') e^{-ip' \cdot x} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} e^{-iq \cdot (x-y)} u(p) e^{-ip \cdot y}.$$

Інтеграли по  $x$  та  $y$  дають дельта-функції, які змушують  $q$  текти від  $y$  до  $x$ . На внутрішніх бозонних лініях напрямок імпульсів є неістотним і може бути обраним як завгодно, оскільки  $D_F(x - y) = D_F(y - x)$ .

Домовлено зображати стрілки на ферміонних лініях таким чином, щоб вони представляли напрям струму числа часток. Тоді імпульс ферміонного пропагатора спрямовано за цією стрілкою. Проте для зовнішніх античастинок імпульс спрямовано проти стрілки; на це явно вказує зображена поруч із лінією друга стрілка.

По-третє, зазначимо, що в наших прикладах діракові індекси згортаються один з одним уздовж ферміонних ліній. Так само це відбувається і в складніших діаграмах:



$$\sim \bar{u}(p_3) \cdot \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2} \cdot \frac{i(\not{p}_1 + m)}{p_1^2 - m^2} \cdot u(p_0). \quad (4.117)$$

Насамкінець зупинимось на ферміонних знаках мінус. Повернімося до прикладу ферміон-ферміонного розсіяння і приймемо такі домовленості про знаки для початкових та кінцевих станів:

$$|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle \sim a_p^\dagger a_k^\dagger |0\rangle, \quad \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| \sim \langle 0| a_{p'} a_{k'}, \quad (4.118)$$

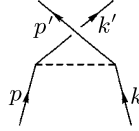
отже,  $(|p, k\rangle)^\dagger = \langle p, k|$ . Тоді згортку

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle \sim \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'} \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle.$$

можна отримати, пересунувши  $\bar{\psi}_y$  на дві позиції вліво, що дасть множник  $(-1)^2 = +1$ . Проте зазначимо, що при згортці

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle \sim \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'} \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle.$$

достатньо пересунути  $\bar{\psi}_y$  на одну позицію вліво, що дасть множник  $-1$ . Ця згортка відповідає діаграмі



Тож у нижчому порядку повний внесок в елемент S-матриці для цього процесу є

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = \\ &= (-ig^2) \left( \bar{u}(p') u(p) \frac{1}{(p' - p)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(k) - \right. \\ &\quad \left. - \bar{u}(p') u(k) \frac{1}{(p' - k)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(p) \right). \end{aligned} \quad (4.119)$$

Різниця у знак мінус між цими діаграмами є відображенням статистики Фермі. Перетворення цього виразу на переріз розсіяння потребувало б певних додаткових зусиль; ми відкладемо ці обчислення до Розділу 5, де вже зможемо розглянути процеси КЕД замість менш цікавої теорії Юкави.

У складних діаграмах нерідко можна спростити процес визначення знаків мінус з огляду на те, що добуток  $(\bar{\psi}\psi)$  або будь-які інші ферміонні пари *комутують* з будь-яким оператором. Отже,

$$\begin{aligned} \cdots (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_w \cdots &= \cdots (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_w \cdots = \\ &= \cdots S_F(x - z) S_F(z - y) S_F(y - w) \cdots \end{aligned}$$

Проте зазначимо, що в замкнутій петлі з  $n$  ферміонних пропагаторів маємо

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \overbrace{\bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi}^{\text{four lines}} = \\
 &= (-1) \overbrace{\bar{\psi}\bar{\psi} \bar{\psi}\bar{\psi} \bar{\psi}\bar{\psi} \bar{\psi}\bar{\psi}}^{\text{four lines}} = \\
 &= (-1) \text{Tr} [S_F S_F S_F S_F].
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

Замкнуті ферміонні петлі завжди дають додатковий множник  $-1$ , а також *слід* від добутку діракових матриць.

### Потенціал Юкави

Тепер ми маємо всі формальні правила, необхідні для обчислення амплітуд розсіяння в теорії Юкави. Перш ніж узятися до вивчення КЕД, коротко звернемося від абстракцій до конкретної фізики й розглянемо одне просте застосування цих правил для розсіяння *нетотожних* ферміонів у нерелятивістській межі. Порівнявши амплітуду цього процесу з формулою для борнового наближення в нерелятивістській квантовій механіці, можна визначити потенціал  $V(r)$ , утворюваний взаємодією Юкави.

Якщо дві взаємодіючі частки нетотожні, то внесок дає лише перша діаграма в (4.119). Для обчислення амплітуди в нерелятивістській межі, зберігаємо лише члени найнижчого порядку за 3-імпульсами. Таким чином, з точністю до  $\mathcal{O}(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}'^2, \dots)$ ,

$$\begin{aligned}
 p &= (m, \mathbf{p}), & k &= (m, \mathbf{k}), \\
 p' &= (m, \mathbf{p}'), & k' &= (m, \mathbf{k}').
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

Використавши ці вирази, маємо

$$\begin{aligned}
 (p' - p)^2 &= -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4), \\
 u^s(p) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \text{и т.д.,}
 \end{aligned}$$

де  $\xi^s$  є двокомпонентним постійним спінором з нормуванням  $\xi^{s'} \dagger \xi^s = \delta^{ss'}$ . Тоді спірні добутки у (4.119) будуть такі:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^{s'}(p') u^s(p) &= 2m \xi^{s'} \dagger \xi^s = 2m \delta^{s's}; \\
 \bar{u}^{r'}(k') u^r(k) &= 2m \xi^{r'} \dagger \xi^r = 2m \delta^{r'r}.
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Отже, наш перший фізичний висновок є таким, що спін кожної частки в цьому нерелятивістському процесі розсіяння зберігається окремо — це приємний результат.

Збираючи разом усі частини амплітуди розсіяння (4.119), отримуємо

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + \mu_\phi^2} 2m \delta^{s's} \delta^{r'r}. \quad (4.123)$$

Цей вираз треба порівняти з борновим наближенням для амплітуди розсіяння в нерелятивістській квантовій механіці, записаній у термінах потенціалу  $V(\mathbf{x})$ :

$$\langle p' | iT | p \rangle = -i\tilde{V}(\mathbf{q}) (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p), \quad (\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (4.124)$$

Тож очевидно, що для взаємодії Юкави

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{-g^2}{\mathbf{q}^2 + \mu_\phi^2}. \quad (4.125)$$

(Множники  $2m$  у (4.123) виникають з релятивістських умов нормування і мають бути вилучені при порівнянні з (4.124), де передбачено стандартне нерелятивістське нормування станів. Додатковий множник  $\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  зникає при інтегруванні по імпульсу мішені.)

Обернення фур'є-перетворення для отримання  $V(x)$  проводиться звичайним чином:

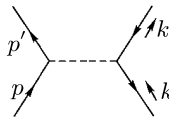
$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{\mathbf{q}^2 + \mu_\phi^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} = \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Контур у цьому інтегралі можна замкнути у верхній півплощині. При цьому береться лишок у простому полюсі в точці  $q = +im_\phi$ . Таким чином, ми отримуємо

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r}, \quad (4.127)$$

що є *притягувальним* „потенціалом Юкави“ з радіусом взаємодії  $1/m_\phi = \hbar/m_\phi c$ , який дорівнює комптоновій довжині хвилі бозона обміну. Юкава взяв цей потенціал за основу в теорії ядерних сил і пішов зворотним шляхом: почав за радіусу сил (приблизно 1 фм) й отримав масу розшукуваного бозона, який назвав піоном (приблизно 200 MeV).

Що ми одержимо при розсіянні частки на античастках? Для процесу

$$f_1(p)\bar{f}_2(k) \rightarrow f_1(p')\bar{f}_2(k')$$


треба обчислити (в нерелятивістському наближенні)

$$\bar{v}^s(k)v^{s'}(k') \approx (\xi^{s'\dagger}, -\xi^{s\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2m \delta^{ss'}. \quad (4.128)$$

Маємо також розібратися з ферміонним знаком мінус. Застосувавши тотожності  $|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$  і  $\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| = \langle 0| b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}$ , можемо записати згорнений матричний елемент, як

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle = \langle 0 | b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'} \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle.$$

Для проведення згортки слід зробити три перестановки операторів, що в підсумку дає множник  $-1$ . Унаслідок чого в (4.128) зникає додатковий знак мінус, тому потенціал Юкави між ферміоном і антиферміоном також є притягувальним і рівним за силою потенціалу між двома ферміонами.

Залишилося розглянути випадок розсіяння двох антиферміонів. Не дивно, що потенціал знову буде притягувальним: додатковий знак мінус з'являється в результаті заміни  $\bar{u}$  на  $\bar{v}$ , а кількість перестановок, необхідних для проведення згортки, є парною. Звідси маємо висновок, що потенціал Юкави *універсально притягувальний*, незалежно від того, чи є він потенціалом взаємодії пари ферміонів, пари антиферміонів або пари ферміон-антиферміон.

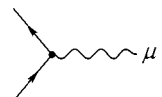
## § 4.8. Фейнманові правила для квантової електродинаміки

Наразі ми готові перейти від теорії Юкави до квантової електродинаміки. Для цього замінімо скалярну частку  $\phi$  на векторну частку  $A_\mu$ , а гамільтоніан взаємодії Юкави на

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (4.129)$$

Як зміняться фейнманові правила? Відповідь легко вгадати, хоча й важко довести. На додаток до правил для ферміонів з попереднього параграфу маємо

Нова вершина :



$$= -ie \gamma^\mu;$$



Фотонний пропагатор :

$$\mu \sim \text{wavy line} \sim \nu \quad \leftarrow q = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon};$$

Зовнішні фотонні лінії :

$$\overline{A}_\mu | \mathbf{p} \rangle = \left| \text{wavy line} \right. \mu \quad \leftarrow p = \varepsilon_\mu(p);$$

$$\langle \mathbf{p} | A_\mu = \mu \quad \leftarrow p = \varepsilon_\mu^*(p).$$

Фотони зазвичай зображають хвилястими лініями. Символ  $\varepsilon_\mu(p)$  задає *вектор поляризації* фотона в початковому або кінцевому стані.

Для виправдання цих правил нагадаємо, що в лоренцовій калібровці (яку ми вибрали, щоб зберегти явну релятивістську інваріантність) рівняння поля для  $A_\mu$  має вигляд

$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (4.130)$$

А отже, для кожного компонента  $A$  справедливе рівняння Кляйна–Гордона (з  $m = 0$ ). Рішеннями цього рівняння в імпульсному представленні будуть функції  $\varepsilon_\mu(p)e^{-ip \cdot x}$ , де  $p^2 = 0$ , а  $\varepsilon_\mu(p)$  є довільним 4-вектором. Інтерпретація  $\varepsilon$ , як вектора поляризації поля має бути знайома з класичного електромагнетизму. Розклавши квантоване електромагнітне поле за набором класичних рішень хвильового рівняння, як це ми зробили для поля Кляйна–Гордона, отримаємо

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=0}^3 (\alpha_{\mathbf{p}}^r \varepsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + \alpha_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \varepsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip \cdot x}), \quad (4.131)$$

де  $r = 0, 1, 2, 3$  позначає базис векторів поляризації. Множники зовнішніх ліній у наведених вище фейнманових правилах негайно впливають з цього виразу достоту так, як ми отримали  $u$  і  $v$  в якості множників зовнішніх ліній для діракових часток. Єдиний нюанс полягає в тому, що треба обмежити початкові та кінцеві фотонні стани поперечно поляризованими. Вектори поляризації цих станів завжди мають вигляд  $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$ , де  $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ . Для  $\mathbf{p}$ , спрямованого вздовж осі  $z$ , право- та лівополяризовані вектори є  $\varepsilon^\mu = (0, 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ .

Вигляд вершинного множника в КЕД теж можна легко пояснити, розглянувши гамільтоніан взаємодії (4.129). Зазначимо, що  $\gamma$ -матриці в амплітудах КЕД завжди знаходяться між спінорами або іншими  $\gamma$ -матрицями з діраковими індексами, згорненими вздовж ферміонної лінії. Візьмемо також до уваги, що цей вид взаємодії стосується електрона (і його античастки — позитрона). Взагалі, для діракової частки з електричним зарядом  $Q|e|$ ,

$$\text{fermion line} \sim \text{wavy line} \sim \mu = -iQ|e|\gamma^\mu.$$

До прикладу, електрон має заряд  $Q = -1$ , верхній кварк — заряд  $Q_u = +2/3$  і нижній кварк —  $Q_d = -1/3$ .

Не існує простого способу отримати формулу для пропагатора фотона, тому поки обмежимося правдоподібними міркуваннями. Оскільки електромагнітне поле в лоренцовій калібровці задовольняє безмасовому рівнянню Кляйна–Гордона, то немає нічого дивного в тому, що пропагатор фотона майже ідентичний пропагатору безмасової частки Кляйна–Гордона. Проте множник  $-g_{\mu\nu}$  потребує пояснень. Лоренц-інваріантність вимагає, щоб пропагатор фотона мав бути ізотропним тензором другого рангу, який може згортатися на кожному кінці з вершинними матрицями  $\gamma^\mu$  і  $\gamma^\nu$ . Найпростіший кандидат — це  $g^{\mu\nu}$ . Для розуміння повного знаку пропагатора, обчислимо його фур'є-перетворення:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{-iq \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{q}|} e^{-iq \cdot (x-y) \cdot (-g_{\mu\nu})}. \quad (4.132)$$

Вірогідно цей вираз дорівнює  $\langle 0 | T[A_\mu(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle$ . Встановимо  $\mu = \nu$  й візьмемо межу  $x^0 \rightarrow y^0$  з позитивного напрямку. Тоді ця величина стає нормою стану  $A_\mu(x)|0\rangle$ , яка мусить бути позитивною. Ми бачимо, що наш вибір знаку в пропагаторі вказує на те, що три стани, породжені  $A_i$  з  $i = 1, 2, 3$  справді мають позитивну норму. Ці стани охоплюють усі реальні (не віртуальні) фотони, чия поляризація завжди простороподібна. На жаль, оскільки  $g_{\mu\nu}$  не є позитивно визначеним, то стани, народжені полем  $A_0$ , неминуче мають негативну норму. Потенційно це серйозна проблема для будь-якої теорії з векторними частками. Як ми покажемо в § 5.5, для квантової електродинаміки стани з негативною нормою, породжені полем  $A_0$ , ніколи не виникають у фізичних процесах. У § 9.4 (Том II) буде наведено строге виведення виразу для фотонного пропагатора.

### Кулонів потенціал

Для демонстрації простого застосування фейнманових правил, а також для кращого розуміння знаку пропагатора, повторимо обчислення для нерелятивістського розсіяння, що його ми провели в попередньому параграфі, але цього разу в КЕД. Головний внесок в амплітуду є

$$i\mathcal{M} = \begin{array}{c} p' \\ \nearrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} k' \\ \nearrow \\ k \end{array} = (-ie)^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p' - p)^2} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k). \quad (4.133)$$

У нерелятивістській межі

$$\bar{u}(p') \gamma^0 u(p) = u^\dagger(p') u(p) \approx +2m \xi'^\dagger \xi.$$

Можна легко переконатися, що інші внески  $\bar{u}(p')\gamma^i u(p)$  зникають за умови  $p = p' = 0$ . Отже, ними можна знехтувати порівняно з  $\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$  в нерелятивістському випадку. Таким чином,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &\approx \frac{+ie^2}{-|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} (2m \xi'^{\dagger}\xi)_p (2m \xi'^{\dagger}\xi)_k \cdot g_{00} = \\ &= \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} (2m \xi'^{\dagger}\xi)_p (2m \xi'^{\dagger}\xi)_k. \end{aligned} \quad (4.134)$$

При порівнянні з теорією Юкави (4.123), бачимо, що присутній додатковий множник  $-1$ ; тобто, потенціал є *відштовхувальним* потенціалом Юкави з  $\mu_\phi = 0$ . Отже, маємо відштовхувальний кулонів потенціал

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}, \quad (4.135)$$

де  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$  — константа тонкої структури. Для розсіяння частка-античастка передовсім зазначимо, що

$$\bar{v}(k)\gamma^0 v(k') = v^\dagger(k)v(k') \approx +2m \xi^\dagger \xi'.$$

Наявність матриці  $\gamma^0$  усуває знак мінус, який ми маємо в теорії Юкави. Отже, нерелятивістська амплітуда розсіяння,

$$i\mathcal{M} = \begin{array}{c} p' \\ \swarrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} k' \\ \swarrow \\ k \end{array} = (-1) \cdot \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} (+2m \xi'^{\dagger}\xi)_p (+2m \xi^\dagger \xi')_k, \quad (4.136)$$

де множник  $-1$  є тим самим ферміонним знаком мінус, що його ми мали в теорії Юкави. Це *притягувальний* потенціал. Відповідно, для антиферміон-антиферміонного розсіяння потенціал виявляється відштовхувальним. Таким чином, ми переконалися, що в квантовій теорії поля при обміні векторною часткою однакові заряди відштовхуються, тоді як протилежні притягуються. Зауважмо, що відштовхування в ферміон-ферміонному розсіянні виникло винятково через додатковий множник  $-g_{00} = -1$  у пропагаторі векторного бозона. Тензорний бозон, наприклад, гравітон, мав би пропагатор

$$\mu \nu \approx \text{~~~~~} \rho \sigma = \frac{1}{2} \left( (-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma}) + (-g_{\mu\sigma})(-g_{\nu\rho}) \right) \left( \frac{i}{q^2 + i\varepsilon} \right).$$

який у нерелятивістських випадках давав би множник  $(-g_{00})^2 = +1$ , що призводить до універсального притягувального потенціалу. Це свідчить, що квантова теорія поля справді відтворює очевидні властивості електричних і гравітаційних сил:

Частки обміну	$ff$ і $\bar{f}\bar{f}$	$\bar{f}f$
скаляр (Юкава)	притягання	притягання
вектор (електрика)	відштовхування	притягання
тензор (гравітація)	притягання	притягання

## Задачі

**4.1.** Повернімося до проблеми народження часток Кляйна–Гордона класичним джерелом. Нагадаємо, що згідно з Розділом 2 цей процес можна описати гамільтоніаном

$$H = H_0 + \int d^3\mathbf{x} (-j(t, \mathbf{x})\phi(x)),$$

де  $H_0$  є вільний гамільтоніан Кляйна–Гордона,  $\phi(x)$  є поле Кляйна–Гордона, а  $j(x)$  —  $c$ -числова скалярна функція. Ми встановили, що в разі, якщо система до включення джерела перебувала у вакуумному стані, то середнє число часток, народжених джерелом, є

$$\langle N \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\tilde{j}(p)|^2.$$

У цій задачі ми перевіримо наведене твердження і отримаємо детальнішу інформацію, використовуючи розкладення в пертурбативний ряд за інтенсивністю джерела.

- (а)** Покажіть, що ймовірність того, що джерело не народжує жодної частки, є

$$P(0) = \left| \langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int d^4x j(x)\phi_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle \right|^2.$$

- (b)** Обчисліть член порядку  $j^2$  у  $P(0)$  і покажіть, що  $P(0) = 1 - \lambda + \mathcal{O}(j^4)$ , де  $\lambda$  дорівнює виразу, заданому вище для  $\langle N \rangle$ .
- (c)** Зобразіть член, отриманий у пункті (b), у вигляді фейнманової діаграми. Тепер представте весь пертурбативний ряд для  $P(0)$  за допомогою діаграм. Покажіть, що цей ряд утворює експоненту, тому може бути точно підсумований:  $P(0) = \exp(-\lambda)$ .
- (d)** Обчисліть ймовірність того, що джерело народжує одну частку з імпульсом  $k$ . Проведіть це обчислення спершу з точністю  $\mathcal{O}(j)$ , а потім для всіх порядків, застосовувавши прийом з пункту (c) для отримання суми рядів.

(e) Покажіть, що ймовірність народження  $n$  часток є

$$P(n) = \frac{1}{n!} \lambda^n \exp(-\lambda).$$

Це є розподіл Пуассона.

(f) Доведіть такі факти для розподілу Пуассона:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1; \quad \langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \lambda.$$

Перша тотожність вказує, що  $P(n)$  є правильно нормовані ймовірності, тим часом як друге підтверджує наш висновок для  $\langle N \rangle$ . Обчисліть середнє квадратичне відхилення  $\langle (1 - \langle N \rangle)^2 \rangle$ .

**4.2. Розпад скалярної частки.** Розглянемо лагранжіан з двома дійсними скалярними полями  $\Phi$  та  $\phi$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mu\Phi\phi\phi.$$

Останній член є взаємодією, що дозволяє частці  $\Phi$  розпадатися на дві частки  $\phi$  за умови, що  $M > 2m$ . Припускаючи, що цю умову виконано, обчисліть час життя частки  $\Phi$  в найнижчому порядку за  $\mu$ .

**4.3. Лінійна сигма-модель.** Взаємодію піонів при низькій енергії можна описати феноменологічною моделлю, що називається *лінійною сигма-моделлю*. Власне, ця модель складається з  $N$  дійсних скалярних полів, пов'язаних  $\phi^4$ -взаємодією, симетричною відносно обертань  $N$  полів. Детальніше, нехай  $\Phi^i(x) = 1, \dots, N$  є набором  $N$  полів з гамільтоніаном

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{1}{2}(\Pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi^i)^2 + V(\Phi^2) \right),$$

де  $(\Phi^i)^2 = \Phi \cdot \Phi$  і

$$V(\Phi^2) = \frac{1}{2}m^2(\Phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}((\Phi^i)^2)^2$$

є функцією, симетричною відносно обертань поля  $\Phi$ . Для (класичних) конфігурацій поля  $\Phi^i$ , постійних у просторі та часі, лише цей вираз дає внесок у гамільтоніан  $H$ ; отже,  $V$  є потенційною енергією поля.

(Який стосунок має цей гамільтоніан до сильної взаємодії? Існує два типи легких кварків  $u$  і  $d$ . Ці кварки ідентичні відносно сильної взаємодії, проте мають різні маси. Якщо кварки безмасові, то гамільтоніан сильної

взаємодії інваріантний відносно унітарних перетворень 2-компонентного об'єкта  $(u, d)$ :

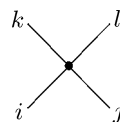
$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\alpha \cdot \sigma/2) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Це перетворення називається *ізоспіновим обертанням*. Крім того, якщо сильна взаємодія описується векторним „глюонним“ полем (що є справедливим для КХД), гамільтоніан сильної взаємодії інваріантний відносно ізоспінових обертань, здійснюваних окремо для лівих і правих компонентів кваркових полів. Таким чином, повна симетрія в КХД з двома безмасовими кварками є  $SU(2) \times SU(2)$ . Відомо, що  $SO(4)$ , група обертань 4-вимірного простору, є ізоморфною групі  $SU(2) \times SU(2)$ , тож для  $N = 4$  лінійна сигма-модель має ту ж групу симетрії, що й сильна взаємодія.)

- (а)** Проаналізуйте лінійну сигма-модель для  $m^2 > 0$ , зважаючи на те, що для  $\lambda = 0$  наведений вище гамільтоніан є точною сумою гамільтоніанів  $N$  незалежних полів Кляйна–Гордона. Тоді можна обчислити амплітуди розсіяння, як пертурбативний ряд за параметром  $\lambda$ . Покажіть, що пропагатор дорівнює

$$\overline{\Phi^i(x)} \Phi^j(y) = \delta^{ij} D_F(x - y),$$

де  $D_F$  — стандартний пропагатор Кляйна–Гордона для маси  $m$ , і що є одна вершина, задана відповідно до правила:



$$= -2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{il}\delta^{jk} + \delta^{ik}\delta^{jl}).$$

(це означає, що вершина між двома  $\Phi^1$  і двома  $\Phi^2$  має значення  $-2i\lambda$ ; а між чотирма  $\Phi^1$  вершина має значення  $-6i\lambda$ .) Обчисліть у головному порядку за  $\lambda$  диференційний переріз  $d\sigma/d\Omega$ , у системі ЦМ для процесів розсіяння

$$\Phi^1\Phi^2 \rightarrow \Phi^1\Phi^2, \quad \Phi^1\Phi^1 \rightarrow \Phi^2\Phi^2 \quad \text{і} \quad \Phi^1\Phi^1 \rightarrow \Phi^1\Phi^1$$

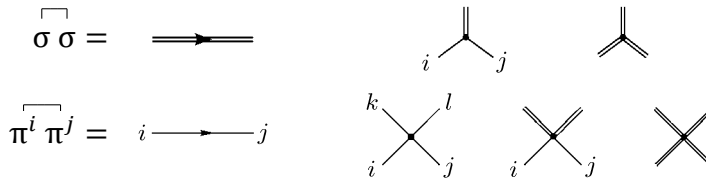
як функції енергії центру мас.

- (б)** Тепер розглянемо випадок  $m^2 < 0$ :  $m^2 = -\mu^2$ . У цьому разі  $V$  має локальний максимум, а не мінімум. Оскільки  $V$  є потенційною енергією, то основний стан теорії перебуває не поблизу  $\Phi^i = 0$ , а отримується

при зсуві  $\Phi^i$  у напрямку до мінімуму  $V$ . Внаслідок обертальної інваріантності можна припустити, що цей зсув відбуватиметься в напрямку  $N$ -го компонента. Тоді запишемо

$$\begin{aligned}\Phi^i(x) &= \pi^i(x), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \Phi^N(x) &= v + \sigma(x),\end{aligned}$$

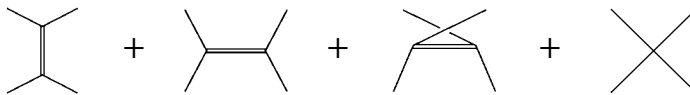
де  $v$  — константа, обрана з умови мінімізації  $V$  (тут  $\pi^i$  позначає піонне поле; не плутати з канонічним імпульсом). Покажіть, що в цих нових координатах (при підстановці замість  $v$  відповідного виразу через параметри  $\lambda$  та  $\mu$ ) отримуємо теорію з масивним полем  $\sigma$  і  $N-1$  безмасовими піонними полями, що взаємодіють через складові в потенційній енергії третього й четвертого степеня, які стають малими при  $\lambda \rightarrow 0$ . Створіть фейнманові правила, вказавши такі значення для пропагаторів і вершин:



(c) Обчисліть амплітуду розсіяння для процесу

$$\pi^i(p_1)\pi^j(p_2) \rightarrow \pi^k(p_3)\pi^l(p_4)$$

у головному порядку за  $\lambda$ . Тут дають внесок чотири діаграми



Покажіть, що на межі ( $\mathbf{p}_i = 0$ ) сума цих діаграм дає нуль. (Підказка: можливо, буде простіше спершу розглянути окремий процес  $\pi^1\pi^1 \rightarrow \pi^2\pi^2$ , для якого лише перша та четверта діаграми ненульові, а потім переходити до загального випадку.) Покажіть, що для  $N = 2$  (один сорт піонів) член порядку  $\mathcal{O}(p^2)$  також скорочується.

(d) Додамо до  $V$  член, що порушує симетрію:

$$\Delta V = -a\Phi^N,$$

де  $a$  — (мала) константа. (В КХД такий член виникає, якщо  $u$  і  $d$  мають однакову ненульову масу.) Знайдіть нове значення  $v$ , що мінімізує  $V$ , і опишіть теорію поблизу цієї точки. Покажіть, що піон набуває маси порядку  $m_\pi^2 \sim a$  і що піонна амплітуда розсіяння при пороговій енергії тепер не зникає і також пропорційна  $a$ .

**4.4. Резерфордове розсіяння.** Переріз розсіяння електрона кулоновим полем ядра можна обчислити в найнижчому порядку без квантування електромагнітного поля. Натомість розглядатимемо це поле, як класичний потенціал  $A_\mu(x)$ . Гамільтоніан взаємодії є

$$H_I = \int d^3\mathbf{x} e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu,$$

де  $\psi(x)$  — звичайне квантоване діракове поле.

- (а) Покажіть, що елемент  $T$ -матриці для електронного розсіяння на локалізованому класичному потенціалі в найнижчому порядку є

$$\langle p' | iT | p \rangle = -ie \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \cdot \tilde{A}_\mu(p' - p),$$

де  $\tilde{A}_\mu u(q)$  — чотиривимірне фур'є-перетворення потенціалу  $A_\mu(x)$ .

- (б) Якщо  $A_\mu(x)$  не залежить від часу, то його фур'є-перетворення містить дельта-функцію від енергії. Тоді природно визначити

$$\langle p' | iT | p \rangle \equiv i\mathcal{M} \cdot (2\pi) \delta(E_f - E_i),$$

де  $E_i$  і  $E_f$  є початковою та кінцевою енергіями частки, і прийняти нове фейнманове правило для обчислення  $\mathcal{M}$ :

$$\text{Feynman diagram} = -ie \gamma^\mu \tilde{A}_\mu(\mathbf{q}),$$

де  $\tilde{A}_\mu(\mathbf{q})$  є тривимірне фур'є-перетворення  $A_\mu(x)$ . При такому визначенні  $\mathcal{M}$  покажіть, що переріз розсіяння на постійному в часі й локалізованому потенціалі є

$$d\sigma = \frac{1}{v_i} \frac{1}{2E_i} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2 (2\pi) \delta(E_f - E_i),$$

де  $v_i$  — початкова швидкість частки. Ця формула є природною модифікацією формули (4.79). Проінтегруйте по  $p_f$ , щоб знайти простий вираз для  $d\sigma/d\Omega$ .

- (с) Розгляньте окремий випадок розсіяння електрона кулоновим потенціалом ( $A^0 = Ze/4\pi r$ ). У нерелятивістському наближенні отримайте формулу Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4m^2 v^2 \sin^4(\theta/2)}.$$

(Якщо скористатися деякими обчислювальними прийомами з § 5.1, не виникає труднощів при розрахунку будь-яких перерізів розсіяння в релятивістському випадку; див. Задачу 5.1.)



## Розділ 5

### Елементарні процеси квантової електродинаміки

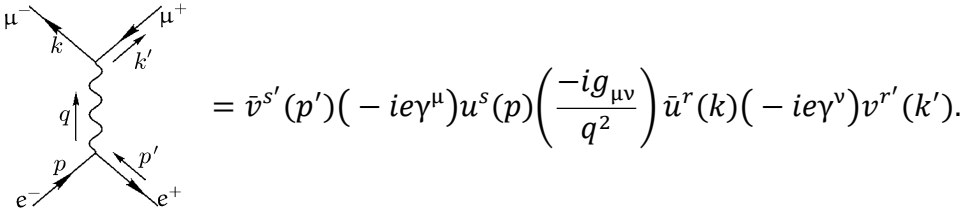
Врешті-решт, після трьох великих розділів, присвячених формалізму, ми готові здійснити низку справжніх релятивістських обчислень, розпочати вивчення передбачень КЕД. Спершу повернемося до до вже розглянутого в Розділі 1 процесу анігіляції електрон-позитронних пар у пари більш важких ферміонів. Цей засадничий процес ми детально розберемо в трьох наступних параграфах. Відтак, у §§ 5.4 і 5.5 проведемо ще кілька простих розрахунків КЕД. Задачі наприкінці розділу стосуються деяких інших процесів, які описує квантова електродинаміка. Повніший виклад КЕД можна знайти в книгах [33] і [8].

#### § 5.1. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : вступ

Реакція  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  є найпростішою з усіх реакцій у КЕД і водночас однією з найважливіших у фізиці високих енергій. Вона є фундаментальною для розуміння всіх реакцій, що відбуваються на  $e^+e^-$  колайдерах. Насправді саме цей процес використовується для калібрування колайдерів. Пов'язаний з ним процес  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  (утворення пари кварк-антикварк) виявляється надзвичайно корисним при вивченні властивостей елементарних часток.

У цьому параграфі ми обчислимо *неполяризований* переріз для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  у найнижчому порядку теорії збурень. У Розділі 1, вдавшись до елементарних міркувань, ми вгадали відповідь (1.8) для граничного випадку, коли всі ферміони є безмасовими. Тепер можемо послабити цю умову і врахувати при обчисленнях масу мюона. Врахування маси електрона не набагато важче, але позбавлено сенсу, оскільки співвідношення  $m_e/m_\mu \approx 1/200$  значно менше, ніж похибка, що її вносять члени вищого порядку пертурбативного ряду. Застосувавши фейнманові правила з § 4.8 можна зобразити

діаграму й виписати вираз для амплітуди процесу:



$$= \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k').$$

Трохи переробивши цей вираз і вилучивши спінові індекси, одержимо

$$i\mathcal{M}(e^-(p)e^+(p') \rightarrow \mu^-(k)\mu^+(k')) = \frac{ie^2}{q^2}(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p))(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')). \quad (5.1)$$

Цей результат для  $\mathcal{M}$  має простий вигляд, але ще не надто ясний і зрозумілий.

Для обчислення диференційного перерізу мусимо отримати вираз для  $|\mathcal{M}|^2$ , а отже, слід знайти комплексно-спряжену величину до  $\mathcal{M}$ . Комплексне спряження добутку біспіновів на зразок  $\bar{v}\gamma^\mu u$  можна провести так:

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = \bar{u}^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = \bar{u}^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v = \bar{u}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v.$$

(Ще одне свідчення зручності використання діракового спряження.) Отже, квадрат матричного елемента:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p'))(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)). \quad (5.2)$$

Ми досі вільні у виборі конкретних спіновів  $u^s(p)$ ,  $\bar{v}^{s'}(p)$  і т. д., що відповідають будь-якому бажаному спіновому стану ферміонів. Проте в реальних експериментах важко (хоча, в принципі, можливо) контролювати спінові стани. Для цього треба підготувати початковий стан з поляризованих часток і/або аналізувати кінцевий стан, використовуючи залежне від спіну багаторазове розсіяння. У більшості дослідів електронні та позитронні пучки не поляризовані, тому вимірюваний переріз є *середнім* за спінами електрона та позитрона  $s$  і  $s'$ . Мюонні детектори зазвичай неспроможні визначити поляризацію, тому вимірюваний переріз є *сумою* за спінами мюонів  $r$  і  $r'$ .

Якщо таким чином позбутися інформації про спіни, вираз для  $|\mathcal{M}|^2$  стає істотно простішим. Ми хочемо обчислити

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2.$$

Сума за спінами проводиться із застосуванням співвідношень повноти (§ 3.3):

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m; \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (5.3)$$

Виписавши явно спінові індекси в першому множнику (5.2), щоб вільно переставити  $v$  до  $\bar{v}$ , маємо

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'} \bar{v}_a^{s'}(p') \gamma_{ab}^\mu u_b^s(p) \bar{u}_c^s(p) \gamma_{cd}^\nu u_d^{s'}(p') &= (\not{p}' - m)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m)_{bc} \gamma_{cd}^\nu = \\ &= \text{Tr} [(\not{p}' - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu]. \end{aligned}$$

Аналогічно вчинивши з другим множником, ми дійдемо до бажаного нами спрощення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] \times \\ &\times \text{Tr} [(\not{k}' - m_\mu) \gamma_\mu (\not{k} + m_\mu) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Спінори  $u$  і  $v$  зникли, залишивши нас із чітким та зрозумілим виразом, записаним через  $\gamma$ -матриці. Така процедура має загальний характер: будь-яка амплітуда КЕД, що містить зовнішні ферміони, після піднесення до квадрату й підсумовування або усереднення за спінами набуває вигляду сліду від добутку діракових матриць.

### Технологія слідів

Цей останній крок навряд чи призвів би до суттєвого покращення ситуації, якби нам довелося брати сліди матриць безпосередньо. Проте Фейнман виявив, що можна значно спростити роботу, скориставшись алгебраїчними властивостями  $\gamma$ -матриць. Оскільки обчислення таких слідів є важливою частиною практичних розрахунків у КЕД, то ми зробимо відступ, щоб ґрунтовно розібратися з цим питанням.

Отже, ми хочемо обчислити слід від добутку  $n$  гамма-матриць, де  $n = 0, 1, 2, \dots$  (Для нашої мети потрібно  $n = 2, 3, 4$ .) Випадок  $n = 0$  надзвичайно простий:  $\text{Tr} \mathbf{1} = 4$ . Взяти слід від однієї  $\gamma$ -матриці також легко. З явного вигляду матриць у кіральному представленні маємо

$$\text{Tr} \gamma^\mu = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Буде корисно одержати цей результат абстрактнішим шляхом, який можна узагальнити для будь-якої непарної кількості  $\gamma$ -матриць:

$$\begin{aligned}\text{Tr } \gamma^\mu &= \text{Tr } \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu && (\text{оскільки } (\gamma^5)^2 = 1) \\ &= -\text{Tr } \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 && (\text{оскільки } \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0) \\ &= -\text{Tr } \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu && (\text{використана циклічна властивість сліду}) \\ &= -\text{Tr } \gamma^\mu.\end{aligned}$$

Оскільки слід від  $\gamma^\mu$  дорівнює самому собі зі знаком мінус, то він є нульовим. Для  $n$   $\gamma$ -матриць ми отримаємо  $n$  мінусів на другому кроці (коли переставляємо другу матрицю  $\gamma^5$  направо), тому слід дорівнює нулю, якщо  $n$  є непарним.

Щоб узяти слід від добутку двох  $\gamma$ -матриць, знову скористаємося його антикомутаційними та циклічними властивостями:

$$\begin{aligned}\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu &= \text{Tr } (2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} - \gamma^\nu \gamma^\mu) && (\text{антикомутація}) \\ &= 8g^{\mu\nu} - \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu && (\text{циклічна перестановка}).\end{aligned}$$

Звідси  $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$ . Таким самим чином можна взяти слід від будь-якої парної кількості  $\gamma$ -матриць: треба переставити першу  $\gamma$ -матрицю через решту направо, застосувавши співвідношення антикомутації, після чого, скориставшись циклічною властивістю, повернути її наліво. Так, для сліду чотирьох  $\gamma$ -матриць маємо

$$\begin{aligned}\text{Tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{Tr } (2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = \\ &= \text{Tr } (2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho} \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu).\end{aligned}$$

Застосувавши циклічність до останнього доданка і перемістивши його в ліву частину рівняння, ми знайдемо

$$\begin{aligned}\text{Tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu} \text{Tr } \gamma^\rho \gamma^\sigma - g^{\mu\rho} \text{Tr } \gamma^\nu \gamma^\sigma + g^{\mu\sigma} \text{Tr } \gamma^\nu \gamma^\rho = \\ &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}).\end{aligned}$$

Цим способом завжди можна звести слід від  $n$   $\gamma$ -матриць до суми слідів від  $(n - 2)$   $\gamma$ -матриць. Неважко вивести вираз для  $n = 6$ , проте він містить п'ятнадцять членів (кількість способів групування шести індексів на пари, щоб отримати доданки  $g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta}$ ). На щастя, ніде в нашому курсі це не знадобиться. (А проте, якщо у вас виникне потреба обчислювати складні сліди, можливо, буде корисно навчитися працювати з однією з комп'ютерних програм, що вміють маніпулювати діраковими матрицями.)

Починаючи з § 5.2, нам часто доведеться брати сліди, що містять матрицю  $\gamma^5$ . Оскільки  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , то слід від добутку  $\gamma^5$  на будь-яку непарну

кількість інших  $\gamma$ -матриць дорівнює нулю. Також легко показати, що слід від самої  $\gamma^5$  є нульовим:

$$\text{Tr} \gamma^5 = \text{Tr} (\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = -\text{Tr} (\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0) = -\text{Tr} (\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = -\text{Tr} \gamma^5.$$

Такий прийом спрацьовує і для  $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5)$ , якщо вставити два множники  $\gamma^\alpha$  з індексом  $\alpha$ , що відрізняється від  $\mu$  та  $\nu$ . Перший ненульовий слід з  $\gamma^5$  дає добуток, який містить чотири інші  $\gamma$ -матриці з різними значеннями індексів, а в іншому раз, коли  $(\mu\nu\rho\sigma)$  не є перестановкою від  $(0123)$ ,  $\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5 = 0$ . З правил антикомутації також впливає, що перестановка будь-яких двох індексів призводить просто до зміни знаку сліду, тож  $\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5$  є пропорційним  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Константа пропорційності дорівнює  $-4i$ , що легко перевірити підстановкою  $(\mu\nu\rho\sigma) = (0123)$ .

Отже, для зручності зведемо всі наші результати для слідів:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{1}) &= 4, \\ \text{Tr}(\text{непарна кількість } \gamma) &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}, \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \\ \text{Tr}(\gamma^5) &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Вирази, одержані з застосуванням останньої формули, можна істотно спростити за допомогою наступних тотожностей:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24, \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu_\nu, \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Їх легко вивести, вдавшись до міркувань симетрії і зробивши явне обчислення в окремому випадку для визначення спільної константи. Ще одна корисна тотожність дозволяє обернути порядок  $\gamma$ -матриць під знаком сліду:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = \text{Tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (5.7)$$

Для доведення цього співвідношення розглянемо матрицю  $C \equiv \gamma^0 \gamma^2$  (оператор зарядового спряження). Вона задовольняє умовам  $C^2 = 1$  і  $C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$ . Таким чином, якщо ми маємо  $n$   $\gamma$ -матриць під знаком сліду, то

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots) &= \text{Tr}(C\gamma^\mu C C\gamma^\nu C \dots) = \\ &= (-1)^n \text{Tr}[(\gamma^\mu)^T (\gamma^\nu)^T \dots] = \\ &= \text{Tr}(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu). \end{aligned}$$

оскільки слід є нульовим у разі непарного  $n$ . Легко показати, що тотожність (5.7) також справедлива, якщо слід містить одну або більше матриць  $\gamma^5$ .

Коли під слідом знаходиться скалярний добуток двох  $\gamma$ -матриць, їх можна легко виключити ще до обчислення самого сліду. Наприклад,

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4. \quad (5.8)$$

Наступні *тотожності згортання*, які легко доводяться за допомогою співвідношень антикомутації, можна застосовувати, коли між скалярним добутком двох  $\gamma$ -матриць знаходяться інші діракові матриці:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho}, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Відзначимо зворотний порядок індексів в останній тотожності.

### Неполяризований переріз

А зараз повернімося до виразу для квадрату матричного елемента (5.4). Перший слід, „електрон-позитронний“, є

$$\text{Tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu] = 4[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(p \cdot p' + m_e^2)].$$

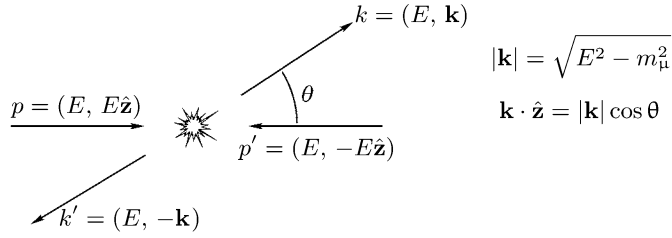
Члени першого порядку за  $m$  обертаються на нуль, бо містять непарну кількість  $\gamma$ -матриць. Це справедливо і для „мюонного“ сліду:

$$\text{Tr}[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu] = 4[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot k' + m_\mu^2)].$$

Відтак встановимо  $m_e = 0$ , про що ми вже домовлялися на початку цього параграфу. Перемноживши ці два вирази і згрупувавши всі члени, маємо простий результат:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_\mu^2(p \cdot p')]. \quad (5.10)$$

Для отримання більш явної формули слід обрати спеціальну систему відліку і записати вектори  $p, p', k, k', q$  у термінах основних кінематичних змінних — енергій та кутів розсіяння — у цій системі. На практиці вибір системи відліку диктують умови експерименту, але ми, як правило, обираємо найзручнішу для нас систему центру мас й обчислюватимемо в ній перерізи розсіяння. У цій системі початкові та кінцеві 4-імпульси для реакції  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  можна записати наступним чином:



Для обчислення квадрату матричного елемента нам знадобляться такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
 q^2 &= (p + p')^2 = 4E^2; & p \cdot p' &= 2E^2; \\
 p \cdot k &= p' \cdot k' = E^2 - E|\mathbf{k}| \cos \theta; & p \cdot k' &= p' \cdot k = E^2 + E|\mathbf{k}| \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Тепер ми можемо переписати (5.10) у термінах  $E$  та  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4} \left[ E^2 (E - |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + E^2 (E + |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right] = \\
 &= e^4 \left[ \left( 1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right].
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Нам залишається підставити цей вираз у формулу для перерізу, отриману в § 4.5. Оскільки в кінцевому стані ми маємо лише дві частки і працюємо в системі ЦМ, то можемо використати спрощену формулу (4.84). У нашій задачі  $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}| = 2$  і  $E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{B}} = E_{\text{ЦМ}}/2$ , отже

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{\text{ЦМ}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{\text{ЦМ}}} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \\
 &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ЦМ}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left( 1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right].
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Інтегруючи по  $d\Omega$  знаходимо повний переріз:

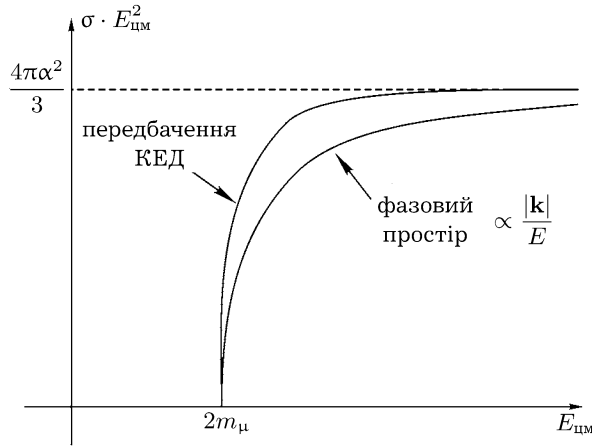
$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{ЦМ}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left( 1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right). \tag{5.13}$$

У межі високих енергій, коли  $E \gg m_\mu$ , ці формули дають результат, який ми одержали в Розділі 1:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &\xrightarrow{E \gg m_\mu} \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ЦМ}}^2} (1 + \cos^2 \theta); \\
 \sigma_{\text{total}} &\xrightarrow{E \gg m_\mu} \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{ЦМ}}^2} \left( 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{m_\mu}{E} \right) - \dots \right).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Відзначимо, що ці вирази мають правильну розмірність перерізу. В наближенні високих енергій  $E_{\text{цм}}$  залишається єдиним розмірним параметром у задачі, тому аналіз розмірності вимагає, щоб  $\sigma_{\text{total}} \propto E_{\text{цм}}^{-2}$ . Оскільки ми від самого початку знали, що  $\sigma_{\text{total}} \propto \alpha^2$ , то вся наша робота зводилася до визначення множника  $4\pi/3$ .

Залежність повного перерізу від енергії за формулою (5.13) біля порогу реакції показано на Рис. 5.1. Певна річ, переріз стає нульовим при



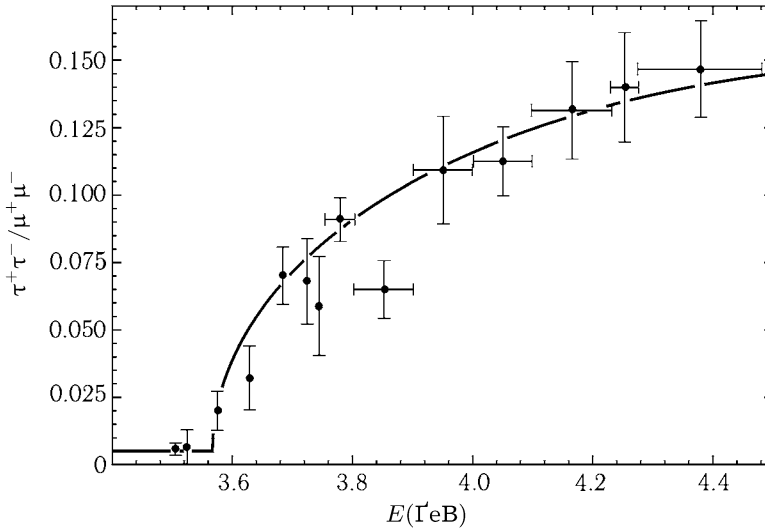
**Рис. 5.1.** Залежність від енергії повного перерізу розсіяння для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  порівняно з енергетичною залежністю „фазового простору“.

$E_{\text{цм}} < 2m_\mu$ . Цікаво порівняти наявну криву з тією, яку можна отримати з припущення, що квадрат матричного елемента не залежить від енергії, а вся така залежність виникає з фазового об'єму  $|\mathbf{k}|/E$ . Для перевірки квантової електродинаміки експеримент має бути здатним визначати відхилення від наївних „фазово-просторових“ розрахунків. Результати дослідів з народження пар  $\mu$  і  $\tau$  лептонів підтверджують, що ці частки поведуться відповідно до передбачень КЕД. На Рис. 5.2 формула (5.13) порівнюється з експериментальними даними біля порогу народження  $\tau^+\tau^-$ .

Перед подальшим обговоренням наших результатів зробимо паузу і повторимо всі етапи їх одержання. Цей метод безпосереднім чином поширюється на обчислення неполяризованих перерізів для інших процесів КЕД. Загальна процедура є такою:

1. Зображаємо діаграми потрібного процесу.
2. Застосовуємо фейнманові правила, щоб написати вираз для амплітуди  $\mathcal{M}$ .





**Рис. 5.2.** Співвідношення  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-)/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$  біля порогу народження пар  $\tau^+\tau^-$  за даними колаборації DELCO (W. Bacino, et. al., *Phys. Rev. Lett.* 41, 13 (1978)). Враховано лише  $\tau$ -розпади, тому загальний масштаб малий. Крива узгоджується з теоретичною формулою (5.13) з невеликою поправкою на наявність незалежного від енергії фону. Обробка результатів дає  $m_\tau = 1782_{-7}^{+2}$  MeV.

3. Підносимо його до квадрату й усереднюємо або підсумовуємо за спіновими станами, використовуючи співвідношення повноти (5.3). (Для процесів за участю фотонів існують аналогічні співвідношення повноти, які ми виведемо в § 5.5.)
4. Обчислюємо сліди на підставі теорем (5.5), згрупуємо члени і максимально спростуємо результат.
5. Переходимо до спеціальної системи відліку і зображаємо картину кінематичних змінних у цій системі. Випишуємо всі вектори 4-імпульсів через зручний набір змінних на зразок  $E$  та  $\theta$ .
6. Підставляємо остаточний вираз для квадрату матричного елемента у формулу для перерізу (4.79) й інтегруємо по тих змінних у фазовому просторі, які не вимірюються в експерименті, для отримання диференційного перерізу в належному вигляді. (У нашому випадку інтегрування проводилося по імпульсах  $\mathbf{k}'$  і  $|\mathbf{k}|$  при виведенні формули (4.84).)

Хоча інші обчислення (а надто ж ті, що містять петльові діаграми) часто потребують додаткових прийомів, мало які розрахунки в КЕД обходяться без наведених тут основних процедур.

### Народження пар кварк-антикварк

Асимптотична залежність від енергії формули для перерізу процесу  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  встановлює масштаб для всіх перерізів  $e^+e^-$ -анігіляції. Особливо важливим прикладом є переріз для

$$e^+e^- \rightarrow \text{адрони},$$

тобто повний переріз утворення довільної кількості часток, що беруть участь у сильній взаємодії.

За сучасними уявленнями про сильну взаємодію, що випливають з теорії, яка називається квантовою хромодинамікою (КХД), всі адрони складаються з діракових ферміонів, *кварків*. Кварки поділяються на різні типи, названі *ароматами*, також кожен з них має певну масу та електричний заряд. Крім того, у кожного кварка є ще одне квантове число, *колір*, яке може набувати одного з трьох значень. Як ми побачимо в Розділі 17, колір у КХД відіграє таку ж роль, що й електричний заряд у КЕД.

Відповідно до КЕД, найпростішим  $e^+e^-$ -процесом, що призводить до народження адронів, є

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q},$$

анігіляція електрона та позитрона через віртуальний фотон з утворення пари кварк-антикварк. Після свого народження ці кварки сильно взаємодіють між собою, утворюючи нові кваркові пари, які зрештою об'єднуються в певну кількість мезонів та баріонів.

Щоб перенести результати з утворення мюонів на процес за участю кварків, ми маємо вдатися до таких модифікацій:

1. Замінити електричний заряд мюона  $e$  на електричний заряд кварка  $Q|e|$ ;
2. Врахувати кожен кварк тричі — по одному разу на кожен колір;
3. Включити ефекти сильної взаємодії для народженої пари кварк-антикварк.

З першими двома змінами впоратися досить легко. Для врахування першого пункту треба просто знати маси та заряди кожного кваркового аромату. Для  $u$ -,  $c$ -, і  $t$ -кварків маємо  $Q = 2/3$ , а для  $d$ -,  $s$ -, і  $b$ -кварків —  $Q = -1/3$ .

Формули для перерізу пропорційні квадрату заряду частки в кінцевому стані, тому ми можемо просто вставити множник  $Q^2$  у будь-яку з цих формул і отримаємо переріз для народження кожного різновиду кварків. Врахування кольору необхідно з тієї причини, що в експериментах вимірюється лише повний переріз народження кварків усіх трьох кольорів. (Адрони, що фіксуються детекторами, безбарвні.) В кожному разі, цей підрахунок простий: досить помножити відповідь на 3.

А проте, якщо ви бодай трохи знаєте про сильну взаємодію, то можете подумати, що все це лише невдалий жарт. Зрозуміло, що здійснити третю модифікацію надзвичайно важко, і вона радикальним чином змінить розрахунки КЕД! Та хоч як це не дивно, але в наближенні високих енергій впливом сильної взаємодії на процес народження кварків можна цілком знехтувати. Як ми з'ясуємо в третьому томі, єдиним ефектом від сильної взаємодії в цьому наближенні є *одягання* кварків у кінцевому стані з утворенням адронних пучків. Таке спрощення пояснюється явищем, яке називається *асимптотичною свободою*; воно відіграє провідну роль у визнанні квантової хромодинаміки правильною теорією сильної взаємодії.

Отже, в межі високих енергій ми очікуємо, що переріз реакції  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  наблизатиметься до  $3 \cdot Q^2 \cdot 4\pi\alpha^2/3E_{\text{цм}}$ . Для таких процесів прийнято використовувати

$$1 \text{ одиниця } R \equiv \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2} = \frac{86,8 \text{ нбарн}}{(E_{\text{цм}} \text{ в } \text{Гев})^2}. \quad (5.15)$$

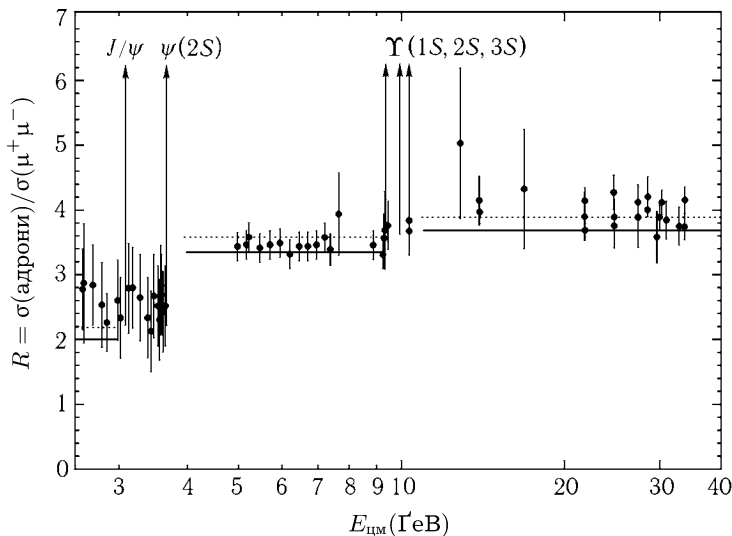
Тобто, величина перерізу в одиницях  $R$  визначається його співвідношенням до асимптотичного значення перерізу  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , одержаного за формулою (5.14). В експериментах найпростіше виміряти повну ймовірність народження всіх можливих типів адронів. У високоенергетичному наближенні ми очікуємо, що

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адрони}) \xrightarrow{E_{\text{цм}} \rightarrow \infty} 3 \cdot \left( \sum_i Q_i^2 \right) R, \quad (5.16)$$

де сума береться за всіма типами (ароматами) кварків, чий маси менші від  $E_{\text{цм}}/2$ . Коли значення  $E_{\text{цм}}/2$  наближається до маси одного з кварків, сильна взаємодія призводить до істотних відхилень від цієї формули. Найвиразніше цей ефект виявляється в утворенні *зв'язаних станів* при значенні енергії трохи меншій, ніж  $E_{\text{цм}} = 2m_q$ , що призводить до виникнення дуже гострих піків у величині перерізу.

Експериментальні результати для перерізу  $e^+e^-$ -анігіляції з народженням адронів при енергіях від 2, 5 до 40 Гев показані на Рис. 5.3. Дані утворюють три чіткі зони: зону низьких енергій, де народжуються пари  $u$ -,  $d$ -, і

s-кварків; зону за порогом народження пар с-кварків; зону за порогом народження пар b-кварків. Результати, одержані з формули (5.16), зображено суцільною лінією; вони добре узгоджуються в кожній зоні з дослідними даними, поки енергія далека від порогів, де високоенергетичне наближення стає непридатним. Пунктирною лінією показано теоретичні розрахунки з поправками вищих порядків квантової хромодинаміки, які ми розглянемо в § 17.2 (Том III). Пояснення величини перерізу  $e^+e^-$ -анігіляції є визна-



**Рис. 5.3.** Експериментальні результати для перерізу реакції  $e^+e^- \rightarrow$  адрони на підставі даних, узагальнених у М. Swartz, *Phys. Rev. D* 53, 5268 (1996). У статті присутні вичерпні посилання на різні експерименти. Вимірювання порівнюються з розрахунками квантової хромодинаміки (див. у тексті). Суцільна лінія відображає прості обчислення за формулою (5.16).

чним успіхом КХД. Зокрема, експериментальне підтвердження множника 3 у (5.16) вважається одним з доказів існування кваркового кольору.

Залежність диференційного перерізу анігіляції від кута також спостерігалася експериментально<sup>19</sup>. При високих енергіях народжені адрони утворюють *струмені*, тобто скупчення кількох адронів, що рухаються приблизно в одному напрямку. У більшості випадків присутні два струмені з протилежними імпульсами, і їхній розподіл справді має кутову залежність  $(1 + \cos^2 \theta)$ .

<sup>19</sup>Грунтовний огляд утворення адронів у високоенергетичних процесах  $e^+e^-$ -анігіляції можна знайти в Р. Duinker, *Rev. Mod. Phys.* 54, 325 (1982).

## § 5.2. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : спіральна структура

Неполяризований переріз реакції загалом нескладно обчислити (і виміряти), проте його важко інтерпретувати. Що означає кутова залежність  $(1 + \cos^2 \theta)$ ? Ми знайдемо відповідь на це питання, обчисливши переріз процесу  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  окремо для кожного набору спінових орієнтацій.

Насамперед слід обрати базис поляризованих станів. Для отримання простої відповіді в наближенні високих енергій найкращим варіантом буде квантувати кожний спин за напрямком руху частки, тобто використовувати стани з визначеною спіральністю. Згадаймо, що в межі нульових мас діракові частки з правою та лівою спіральністю перетворюються за різними представленнями групи Лоренца. Отже, ми можемо сподіватися, що вони поведуться незалежно. Так насправді і є.

У цьому параграфі ми розрахуємо поляризований переріз реакції  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  у спіральному базисі двома різними способами. Перший — з застосуванням техніки обчислення слідів і операторів проектування на стані з визначеною спіральністю. Другий — безпосередньо підставивши у формулу для амплітуди  $\mathcal{M}$  явні вирази для спинорів. Впродовж усього параграфу ми працюватимемо у високоенергетичному наближенні, коли всі ферміони ефективно безмасові. (Можна провести обчислення і для низьких енергій, проте технічно вони набагато складніші, а їх результати не стануть від того повчальнішими.)<sup>20</sup>

Відправним пунктом для обох методів обчислення поляризованого перерізу є вираз (5.1) для амплітуди розсіяння. З міркувань зручності ми наводимо його ще раз:

$$i\mathcal{M}(e^-(p)e^+(p') \rightarrow \mu^-(k)\mu^+(k')) = \frac{ie^2}{q^2}(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p))(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')). \quad (5.1)$$

Як і раніше, ми хочемо використати тотожності для спінових сум і записати квадрат амплітуди через сліди, але наразі збираємося розглядати кожен набір поляризацій окремо. Щоб зробити це, відзначимо, що для безмасових ферміонів матриці

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

є проекційними операторами на праві та ліві спинори відповідно. Отже, якщо у виразі (5.1) здійснити заміну

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \rightarrow \bar{v}(p')\gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u(p),$$

<sup>20</sup>Загальний формалізм для S-матриці між станами визначеної спіральності викладено в чудовій статті M. Jacob and G. C. Wick, *Ann. Phys.* 7, 404 (1959).

то амплітуда для правополяризованого електрона не зміниться, тоді як для лівополяризованого стане нульовою. А оскільки

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p) = v^\dagger(p')\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\gamma^0\gamma^\mu u(p), \quad (5.18)$$

то ця ж заміна вимагає, щоб  $v(p')$  також був правополяризованим спінором. А як ми встановили у § 3.5, правий спінор  $v(p')$  відповідає *лівополяризованому* позитрону. Звідси випливає, що амплітуда анігіляції є нульовою і тому випадку, коли і електрон, і позитрон правополяризовані. Загалом, амплітуда дорівнює нулю (у безмасовому наближенні) в усіх випадках за винятком ситуації, коли електрон та позитрон мають протилежні спіральності — або, що еквівалентно, відповідні їм спінори мають однакову спіральність.

Зробивши підстановку проекційних операторів, ми можемо взяти суму за спінами електрона й позитрона у квадраті амплітуди. З чотирьох членів у цій сумі лише один (саме той, що нам потрібен) не є нульовим. Електронна частина  $|\mathcal{M}|^2$  для правополяризованого електрона і лівополяризованого позитрона є

$$\begin{aligned} \sum_{\text{спіни}} \left| \bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p) \right|^2 &= \\ &= \sum_{\text{спіни}} \bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)v(p') = \\ &= \text{Tr} \left[ \not{p}'\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\not{p}\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \right] = \\ &= \text{Tr} \left[ \not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \right] = \\ &= 2(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}p \cdot p' - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p_\alpha p'_\beta). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Індекси  $\mu$  та  $\nu$  в цьому виразі мають згорнутися з відповідними індексами мюонної частини квадрату амплітуди при перемноженні цих двох частин. Для лівополяризованого  $\mu^+$  і правополяризованого  $\mu^-$  таке ж саме обчислення дає

$$\begin{aligned} \sum_{\text{спіни}} \left| \bar{u}(k')\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)v(k) \right|^2 &= \\ &= 2(k_\mu k'_\nu + k^\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}k \cdot k' - i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}k^\rho k'^\sigma). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Помноживши (5.19) на (5.20), знаходимо, що квадрат амплітуди для  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$  у системі ЦМ є

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[ 2(p \cdot k)(p' \cdot k') + 2(p \cdot k')(p' \cdot k) - \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p_\alpha' p_\beta k^\rho k'^\sigma \right] = \\
 &= \frac{8e^4}{q^4} \left[ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - \right. \\
 &\quad \left. - (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) \right] = \\
 &= \frac{16e^4}{q^4} (p \cdot k')(p' \cdot k) = \\
 &= e^4 (1 + \cos \theta)^2.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Підставивши цей результат у (4.85) маємо диференціальний переріз:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ЦМ}}^2} (1 + \cos \theta)^2. \tag{5.22}$$

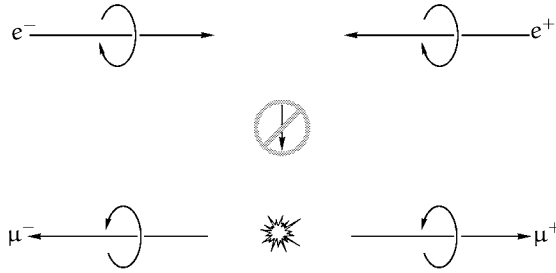
Немає потреби повторювати обчислення, щоб отримати інші три ненульові спіральні амплітуди. До прикладу, квадрат амплітуди для  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$  є майже ідентичним (5.20) за винятком знаку мінус перед  $\gamma^5$  у лівій його частині, а, отже, у правій треба замінити  $\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$  на  $-\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$ . Врахувавши цю заміну в (5.21), ми побачимо, що

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ЦМ}}^2} (1 - \cos \theta)^2. \tag{5.23}$$

Так само,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ЦМ}}^2} (1 - \cos \theta)^2; \\
 \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ЦМ}}^2} (1 + \cos \theta)^2.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

(Ці два результати насправді впливають із двох попередніх завдяки  $P$ -інваріантності.) Як ми бачили з (5.18), решта дванадцять спіральних перерізів (наприклад для  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_L^+$ ) дорівнюють нулю. Підсумувавши всі шістнадцять внесків і розділивши на 4 для усереднення за спінами електрона та позитрона, ми знову одержимо вираз (5.14) для неполяризованого перерізу в безмасовому наближенні.



**Рис. 5.4.** Збереження моменту імпульсу вимагає, щоб при вимірюванні його складової уздовж осі  $z$  вона мала таке ж значення, що й на початку.

Зазначимо, що переріз (5.22) для  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$  стає нульовим при  $\theta = 180^\circ$ . Це саме те, чого ми очікували, оскільки для  $\theta = 180^\circ$  повний момент імпульсу кінцевого стану є протилежним до моменту імпульсу початкового стану (див. Рис. 5.4).

На цьому завершається наше перше обчислення поляризованого перерізу для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Тепер ми повторимо наші розрахунки іншим способом — прямішим, яснішим і менш складним. Обчислюватимемо амплітуду  $\mathcal{M}$  (що є краще, ніж її квадрат) безпосередньо, з використанням явних виразів для спінорів і  $\gamma$ -матриць. Цей метод має свої недоліки: по-перше, він змушує нас уже від самого початку обрати певну систему відліку, через що втрачається явна лоренц-інваріантність; по-друге, з практичного погляду він дуже громіздкий, за винятком наближень у нерелятивістській та ультрарелятивістській межі.

Знову розглянемо амплітуду

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(k) \gamma_\mu v(k')). \quad (5.25)$$

У високоенергетичному наближенні наші загальні вирази для діракових спінорів стають такими:

$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \sigma) \xi \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \sigma) \xi \end{pmatrix}; \\ v(p) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \sigma) \xi \\ -\frac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \sigma) \xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Правий спінор задовольняє умові  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \sigma) \xi = +\xi$ , а лівий —  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \sigma) \xi = -\xi$ . (Ще раз нагадаємо, що для античастинок поляризація спінора протилежна поля-

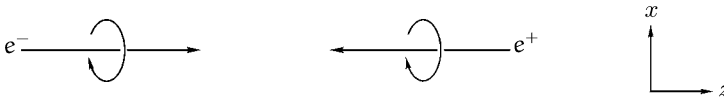


ризації самої частки.) Ми маємо обчислити вирази вигляду  $\bar{v}\gamma^\mu u$ , тому нам знадобиться формула

$$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Відтак ми ясно бачимо, що амплітуда є нульовою, якщо один із спінів правий, а інший лівий. За термінологією Розділу 1, коефіцієнти Клебша–Гордана, що зв'язують векторний фотон з добутком таких спінів, дорівнюють нулю; власне, ці коефіцієнти є недиагональними елементами матриці  $\gamma^0\gamma^\mu$  в кіральному представленні.

Оберімо  $p$  та  $p'$  спрямованими вздовж осі  $z$ , протилежно один до одного, і спершу розглянемо випадок, коли електрон є правополяризованим, а позитрон — лівополяризованим:



Тоді для електрона маємо  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , що відповідає спіну, орієнтованому в напрямку  $+z$ , а для позитрона —  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , що також відповідає (фізичному) спіну в напрямку  $+z$ . Для обох часток  $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = +\xi$ , тому спінори є

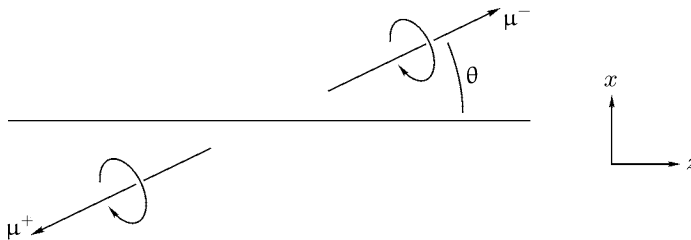
$$u(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v(p') = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Таким чином, електронна частина матричного елемента:

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = 2E (0, -1) \sigma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2E (0, 1, i, 0). \quad (5.29)$$

Цей вираз ми можемо інтерпретувати так, що віртуальний фотон має кругову поляризацію в напрямку  $+z$ , а його вектор поляризації є  $\varepsilon_+ = 1/\sqrt{2}(\hat{x} + i\hat{y})$ .

Далі маємо обчислити мюонну частину матричного елемента. Припустимо, що  $\mu^-$  вилітає під кутом  $\theta$  до осі  $z$ , і передовсім розглянемо випадок, коли він правополяризований (а  $\mu^+$  лівополяризований):



Для обчислення  $\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')$  ми могли б повернутися до виразів (5.26), але тоді мусили б знайти правильні спінори  $\xi$ , що відповідають поляризації вздовж імпульсу мюона. Зручніше вдатися до такого прийому: оскільки будь-який вираз на зразок  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  перетворюється, як 4-вектор, ми можемо просто трансформувати результат (5.29). Здійснивши поворот вектора на кут  $\theta$  у площині  $xz$ , знайдемо

$$\begin{aligned}\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') &= [\bar{v}(k')\gamma^\mu u(k)]^* = \\ &= [-2E(0, \cos\theta, i, -\sin\theta)]^* = \\ &= -2E(0, \cos\theta, -i, -\sin\theta).\end{aligned}\quad (5.30)$$

Цей вектор знову можна інтерпретувати, як поляризацію віртуального фотона; якщо вона не ортогональна до (5.29), то ми одержимо ненульову амплітуду. Підставивши (5.29) і (5.30) у (5.25), ми бачимо, що амплітуда є

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = \frac{e^2}{q^2} (2E)^2 (-\cos\theta - 1) = -e^2(1 + \cos\theta), \quad (5.31)$$

у цілковитій відповідності (включно зі знаком мінус) з (1.6) і (5.21). Диференціальний переріз для цього набору спіральностей так само можна отримати з формули (4.85), що приводить нас до виразу (5.22).

Інші три ненульові спіральні амплітуди обчислюються аналогічно. Для лівополяризованого електрона і правополяризованого позитрона легко знаходимо

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = -2E(0, 1, -i, 0) \equiv -2E \cdot \sqrt{2} \varepsilon_-^\mu.$$

Здійснивши поворот, щоб отримати вектор, який відповідає лівополяризованому  $\mu^-$  і правополяризованому  $\mu^+$ , маємо

$$\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') = -2E(0, \cos\theta, i, \sin\theta).$$

Підставивши ці вирази в різних комбінаціях у (5.25), одержимо решту амплітуд:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= -e^2(1 + \cos\theta); \\ \mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = -e^2(1 - \cos\theta).\end{aligned}\quad (5.32)$$

### § 5.3. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : нерелятивістська межа

Перейдемо тепер до іншого кінця енергетичного спектру і розглянемо реакцію  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  у гранично нерелятивістському наближенні. Коли  $E$  лише трохи більша за масу мюона  $m_\mu$ , наш попередній результат (5.12) для

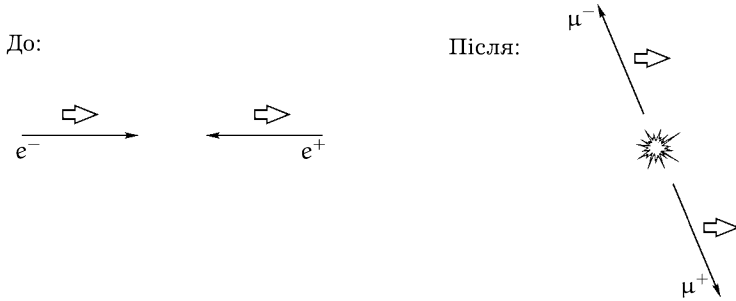
неполяризованого диференційного перерізу стане таким:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{2E_{\text{цм}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{цм}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{E}. \quad (5.33)$$

Ми можемо відтворити цей результат, провівши обчислення амплітуди з явними виразами для спінів, і заразом дізнаємося дещо про спінову залежність процесу. Знову почнемо з матричного елемента:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(k) \gamma_\mu v(k')).$$

Електрон та позитрон, як і раніше, є релятивістськими частками,<sup>21</sup> тому



**Рис. 5.5.** У нерелятивістському наближенні загальний спін системи зберігається, тому обидва народжені мюони мають спіни орієнтовані в напрямку  $+z$ .

вираз матиме найпростіший вигляд, якщо обрати для них стани з визначеною спіральністю. Нехай електрон є правополяризованим і рухається в напрямку  $+z$ , а лівополяризований позитрон — у напрямку  $-z$ . Тоді з (5.29) маємо

$$\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) = -2E (0, 1, i, 0). \quad (5.34)$$

В іншій половині матричного елемента треба використати нерелятивістський вираз

$$u(k) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad v(k') = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\xi' \\ -\xi' \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

При подальшому розгляді в цьому параграфі слід мати на увазі, що спіновр  $\xi'$  дає перевернутий спін античастки. Залишивши мюонні спінори  $\xi$  і  $\xi'$  наразі

<sup>21</sup> Бо інакше їх анігіляція не призведе до утворення мюонів. (Прим. перекл.)

невизначеними, ми легко обчислимо:

$$\begin{aligned}\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') &= m(\xi^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi' \\ -\xi' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{для } \mu = 0, \\ -2m \xi^\dagger \sigma^i \xi' & \text{для } \mu = i. \end{cases}\end{aligned}\quad (5.36)$$

Для знаходження  $\mathcal{M}$  візьмемо скалярний добуток (5.34) і (5.36), а потім помножимо його на  $e^2/q^2 = e^2/4m^2$ . В результаті,

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-) = -2e^2 \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi'. \quad (5.37)$$

Оскільки цей вираз не залежить від кута, мюони рівномірно вилітають в усіх напрямках. Точніше кажучи, вони випромінюються в  $s$ -хвилі, і їхній орбітальний момент імпульсу дорівнює нулю. Закон збереження моменту імпульсу вимагає, щоб повний спін кінцевого стану дорівнював 1, і справді — добуток матриць дає нуль, якщо спіни мюона й антимюона не орієнтовані в напрямку  $+z$  (Рис. 5.5).

Для знаходження остаточного результату візьмемо суму за мюонними спінами і одержимо  $\mathcal{M}^2 = 4e^4$ , що дає формулу для перерізу:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{\alpha^2}{E_{\text{цм}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{E}. \quad (5.38)$$

Такий самий вираз справедливий і для анігіляції лівополяризованого електрона з правополяризованим позитроном. Усереднений за спінами переріз складає  $2 \cdot (1/4)$  від не усередненого, у цілковитій відповідності з (5.33).

## Зв'язані стани

Досі ми вважали, що початкові та кінцеві стани у процесах розсіяння є станами окремих ізольованих часток. Проте біля порогу реакції кулонове притягання між мюонами стає істотним фактором. При енергіях трохи нижчих за порогову  $\mu^+\mu^-$ -пари можуть утворювати електромагнітні зв'язані стани.

Зв'язані стани у квантовій теорії поля є предметом глибокого та ґрунтовного розгляду, який виходить за межі нашого курсу.<sup>22</sup> На щастя, багато відомих у природі зв'язаних станів можна розглядати як нерелятивістські системи (принаймні, в першому наближенні), у яких внутрішні швидкості досить малі. Процес народження з вакууму часток, що утворюють зв'язану

<sup>22</sup> Гарні огляди зі зв'язаних станів у квантовій теорії поля можна знайти у статтях Bodwin, Yennie, Gregorio, *Rev. Mod. Phys.* 57, 723 (1985), і Sapirstein, Yennie, у збірці [35].

систему  $\epsilon$ , однак, релятивістським ефектом і потребує для свого описання методів квантової теорії поля. В цьому параграфі ми розробимо формалізм для отримання амплітуд народження та знищення двочасткових нерелятивістських зв'язаних станів. Почнемо з обчислення перерізу утворення зв'язаного стану  $\mu^+\mu^-$  у процесі  $e^+e^-$ -анігіляції.

Розглянемо спершу випадок, коли спіни позитрона та електрона орієнтовані в напрямку  $+z$ . З попереднього обговорення ми знаємо, що спіни обох мюонів будуть орієнтовані так само, і єдиний зв'язаний стан, який може виникнути, матиме спін 1 такої ж орієнтації. Амплітуда народження вільних мюонів у цій конфігурації є

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1 \uparrow, \mathbf{k}_2 \uparrow) = -2e^2 \quad (5.39)$$

і не залежить від імпульсів ( $\mathbf{k}_1$  і  $\mathbf{k}_2$ ) мюонів.

Далі ми маємо з'ясувати, як записати зв'язані стани через стани вільних часток. У загальному випадку, для двочасткових систем з однаковими масами складових положення центру мас і відносні координати є

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (5.40)$$

Відповідні їм імпульси:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (5.41)$$

Повний імпульс  $\mathbf{K}$  у системі ЦМ дорівнює нулю. Якщо ми знаємо силу взаємодії між частками (для  $\mu^+\mu^-$  це кулонова сила), то можемо розв'язати нерелятивістське рівняння Шродінгера і знайти шродінгерову хвильову функцію  $\psi(\mathbf{r})$ . Зв'язані стани є просто лінійною суперпозицією вільних станів з визначеними  $\mathbf{r}$  або  $\mathbf{k}$ , зважених за цією хвильовою функцією. Для наших цілей зручніше побудувати таку суперпозицію в імпульсному просторі, застосувавши до  $\psi(\mathbf{r})$  перетворення Фур'є:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}); \quad \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (5.42)$$

Якщо  $\psi(\mathbf{r})$  має звичайне нормування,  $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$  дає амплітуду перебування частки у стані з імпульсом  $\mathbf{k}$ . Явний вираз для зв'язаного стану з масою  $M \approx 2m$ , імпульсом  $\mathbf{K} = 0$  та спіном 1, спрямованим угору, є

$$|B\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \uparrow\rangle. \quad (5.43)$$

Множники  $(1/\sqrt{2m})$  перетворює нормовані релятивістським чином стани вільних часток у такі, що їх інтеграл з  $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$  стає нормованим на 1. (Власне, множник має містити  $\sqrt{2E_{\pm\mathbf{k}}}$ , але в нерелятивістському наближенні

$|\mathbf{k}| \ll m$ .) Зовнішній множник  $\sqrt{2M}$  повертає релятивістськи-інваріантне нормування, яке використовується в нашій формулі для перерізу. Ці нормувальні множники неважко модифікувати для опису зв'язаного стану з ненульовим повним імпульсом  $\mathbf{K}$ .

Маючи вираз для зв'язаного стану, ми можемо негайно виписати амплітуду його народження:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{2M} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}^*(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow). \quad (5.44)$$

Позаяк амплітуда вільного стану (5.39) не залежить від імпульсів мюонів, то інтеграл по  $\mathbf{k}$  дає  $\Psi^*(0)$ , тобто величину координатної хвильової функції в точці центру мас. Цілком природно, що амплітуда утворення двочасткового стану точковим віртуальним фотоном має бути пропорційна значенню хвильової функції в нульових координатах. З огляду на те, що в нерелятивістському наближенні  $M \approx 2m$ , отримуємо

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \Psi^*(0). \quad (5.45)$$

Трохи нижче ми обчислимо з цієї амплітуди переріз, але спершу узагальнимо наш розгляд на зв'язані стани з довільними спіновими конфігураціями. Аналіз, подібний до того, що дав нам вираз (5.37), засвідчує, що будь-який елемент  $S$ -матриці для народження нерелятивістських ферміонів з імпульсами  $\mathbf{k}$  і  $-\mathbf{k}$  має вигляд спінового матричного елемента:

$$i\mathcal{M}(\text{щось} \rightarrow \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \xi^\dagger [\Gamma(\mathbf{k})] \xi', \quad (5.46)$$

де  $\Gamma(\mathbf{k})$  деяка  $2 \times 2$ -матриця. Тепер замінімо спінори нормованою хвильовою функцією зв'язаного стану. У щойно розглянутому прикладі ми зробили заміну

$$\xi' \xi^\dagger \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

У загальнішому випадку, стан зі спіном 1 можна отримати, замінивши

$$\xi' \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.48)$$

де  $\mathbf{n}$  є одиничним вектором. Вибір  $\mathbf{n} = (\hat{x} + i\hat{y})/\sqrt{2}$  дає (5.47), а  $\mathbf{n} = (\hat{x} - i\hat{y})/\sqrt{2}$  і  $\mathbf{n} = \hat{z}$  — інші два стани зі спіном 1:  $\downarrow\downarrow$  і  $(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ . (Відносний знак мінус у (5.48) в останньому випадку з'являється з правила (3.135) для

перевернутого спіну.) Таким самим чином, стан з нульовим спіном ( $\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$ )/ $\sqrt{2}$  дає заміна

$$\xi'\xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{I}, \quad (5.49)$$

де  $\mathbf{I}$  позначає одиничну  $2 \times 2$  матрицю. За цими правилами ми можемо перетворити  $S$ -матричний елемент вигляду (5.46) на  $S$ -матричний елемент для народження зв'язаного стану у спокої:

$$i\mathcal{M}(\text{щось} \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}^*(\mathbf{k}) \text{Tr} \left( \frac{\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}} \Gamma(\mathbf{k}) \right), \quad (5.50)$$

де слід береться за індексами двокомпонентного спінора. Для зв'язаного стану з нульовим спіном треба замінити  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  на одиничну матрицю  $\mathbf{I}$ .

### Народження і розпад векторного мезона

З формули (5.45) можна безпосередньо отримати переріз народження зв'язаних станів  $\mu^+\mu^-$  у процесі  $e^+e^-$ -анігіляції. Щоб полегшити розуміння фізичного сенсу цього виразу, введемо вектори поляризації для початкової та кінцевої спінових конфігурацій:  $\varepsilon_+ = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$  з (5.29) і  $\mathbf{n}$  з (5.48). Тепер (5.45) можна переписати в більш інваріантній формі:

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow B) = \frac{2}{M} (-2e^2)(\mathbf{n}^* \cdot \varepsilon_+) \Psi^*(0). \quad (5.51)$$

Спінова поляризація  $\mathbf{n}$  проектується на  $\varepsilon_+$ . У тому випадку, коли поляризація початкових електронів невизначена, переріз народження зв'язаного стану  $B$  включає усереднення за поляризаціями:

$$\frac{1}{4}(|\mathbf{n}^* \cdot \varepsilon_+|^2 + |\mathbf{n}^* \cdot \varepsilon_-|^2) = \frac{1}{4}((n^x)^2 + (n^y)^2). \quad (5.52)$$

Таким чином, зв'язані стани будуть переважно поляризовані вздовж осі зіткнення електрона та позитрона.

Виходячи з припущення, що пучок електронів не є поляризованим, і підсумовуючи (5.52) за трьома можливими напрямками  $\mathbf{n}$ , знайдемо наступний вираз для повного перерізу народження зв'язаного стану:

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow B) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2m} \frac{1}{2m} \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_K} \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p' - K) \frac{2}{M} (4e^4) \frac{1}{2} |\Psi(0)|^2. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Відзначимо, що інтеграл по одночастковому фазовому простору прибирає лише три з чотирьох дельта-функцій. Щоб зрозуміти значення четвертої,

слід переписати її, виходячи зі співвідношення  $\delta(p^0 - K^0) = 2K^0 \delta(P^2 - K^2)$ . Тоді

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 64\pi^3 \alpha^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{\text{цм}}^2 - M^2). \quad (5.54)$$

Ця остання дельта-функція вказує на те, що повна енергія в системі ЦМ має дорівнювати загальній масі зв'язаних часток. Таким чином, зв'язаний стан народжується як резонанс в електрон-позитронній анігіляції. Якщо він має скінченний час життя, то дельта-функція розширюється в резонансний пік. На практиці, істотнішим механізмом такого розширення є різниця енергій окремих електронів та позитронів у пучку. Та в кожному разі, формула (5.54) правильно передбачає площу під резонансним піком.

Якщо зв'язаний стан  $B$  може утворюватися з  $e^+e^-$ -пар, то він також може й анігілювати з утворенням пари  $e^+e^-$  чи будь-яких інших достатньо легких лептонів. Згідно з (4.86), повна ширина для цієї моди розпаду є

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{1}{2M} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2, \quad (5.55)$$

де  $\mathcal{M}$  є тим самим матричним елементом (5.51), за яким ми обчислювали утворення стану  $B$ . Отже,

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \left( \frac{1}{2\pi} \frac{d \cos \theta}{2} \right) \frac{8e^4}{M} |\Psi(0)|^2 (|\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*|^2). \quad (5.56)$$

Тепер ми маємо взяти суму за станами поляризації електронів і усереднити за трьома можливими значеннями  $\mathbf{n}$ . Відтак одержимо

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{3} \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2}. \quad (5.57)$$

Формула для ширини розпаду  $B$  дуже схожа на переріз його народження, і це цілком зрозуміло, адже в обох обчисленнях присутній квадрат одного й того ж матричного елемента, підсумований за початковими та кінцевими поляризаціями. Два обчислення відрізняються лише фазовими об'ємами і тим, як ми проводили усереднення за поляризаціями. За цією логікою, співвідношення між двома величинами,

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 4\pi^2 \cdot \frac{3\Gamma(B \rightarrow e^+e^-)}{M} \cdot \delta(E_{\text{цм}}^2 - M^2), \quad (5.58)$$

є загальним і цілком незалежним від деталей обчислення матричного елемента. Множник 3 у (5.58) виник через усереднення за орієнтацією  $\mathbf{n}$ ; для зв'язаного стану зі спіном  $J$  він має дорівнювати  $(2J + 1)$ .

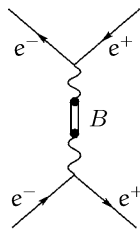


Найвідомішим є застосування цього формалізму не до мюонів, а до зв'язаного стану двох кварків, так званого *кварконію*. Експериментальні свідчення утворення зв'язаних пар  $q\bar{q}$  (наприклад,  $J/\psi$  або  $\Upsilon$ ) присутні на Рис. 5.2. (Резонансні піки занадто високі й гострі, щоб показати їх на графіку, проте їхні розміри були точно виміряні.) Вирази (5.54) і (5.57) треба помножити на кольоровий фактор 3, щоб отримати переріз народження та ширину розпаду зв'язаного стану  $q\bar{q}$  зі спіном 1. Значення  $\psi(0)$  хвильової функції  $q\bar{q}$  не можна обчислити, виходячи лише з кулонової взаємодії, але можна оцінити на підставі нерелятивістської моделі кваркового спектру з феноменологічно підібраним потенціалом. Альтернативно, ми можемо застосувати формулу

$$\Gamma(B(q\bar{q}) \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 Q^2 \frac{|\psi(0)|^2}{M^2}, \quad (5.59)$$

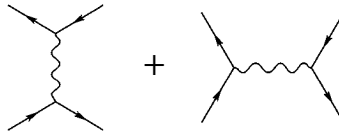
щоб визначити  $\psi(0)$  для зв'язаного стану  $q\bar{q}$ . До прикладу, стан  $1S$  пари  $s\bar{s}$  зі спіном 1,  $\phi$ -мезон, має парціальну ширину розпаду 1,4 кеВ по каналу  $e^+e^-$  і масу 1,02 ГеВ. З цього ми можемо вивести, що  $|\psi(0)|^2 = (1,2 \text{ фм})^{-3}$ . Цей результат є фізично прийнятним, оскільки типові розміри адронів якраз мають порядок 1 фм.

Наш підхід у цьому параграфі помітно відрізняється від того, що ми застосовували досі. Замість проведення обчислень на підставі засадничих принципів, зібрали по частинах наближену формулу, використавши лише мінімум інструментів квантової теорії поля та квантової механіки. А проте, ми могли б описати зв'язані стани, цілком виходячи з релятивістського формалізму. Розглянемо анігіляцію пари  $e^+e^-$  з утворення зв'язаного стану  $\mu^+\mu^-$ , який потім розпадеться знову на  $e^+e^-$ . Дотримуючись засад нашого формалізму, можемо представити цей процес діаграмою

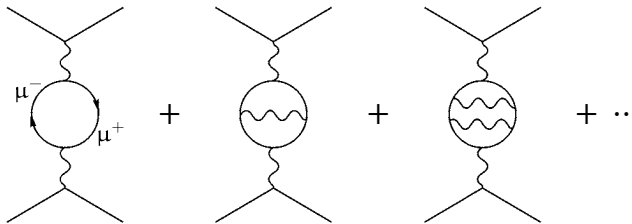


У кінцевому підсумку він має вигляд  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  (розсіяння Баба). Що станеться, якщо ми спробуємо розрахувати переріз цього розсіяння, застосувавши безпосередньо теорію збурень КЕД? Очевидно, пари  $\mu^+\mu^-$  не ро-

блять внеску в деревовидні діаграми:



Проте, перейшовши до вищих порядків пертурбативного ряду, ми виявимо, поміж інших, такий набір діаграм:



Для більшості значень  $E_{\text{цм}}$  вони дають лише незначні поправки до деревовидного наближення. Та коли  $E_{\text{цм}}$  є близькою до порогу народження  $\mu^+\mu^-$ , у діаграмах, що включають обмін фотонами в мюонній петлі, стає істотною кулонова взаємодія між мюонами, тому їхня вага різко зростає. Підсумувавши внески всіх таких діаграм, можна показати, що ця сума еквівалентна рішенню нерелятивістського рівняння Шродінгера.<sup>23</sup> Як наслідок, у виразі для перерізу з'являється резонансний пік, площа та ширина якого задаються формулами (5.54) і (5.57) відповідно.

## § 5.4. Кросинг-симетрія

### Електрон-мюонне розсіяння

Завершивши розгляд процесу  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , звернемося тепер до іншого, але тісно пов'язаного з ним, процесу КЕД: електрон-мюонного розсіяння  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ . Фейнманова діаграма нижчого порядку є такою самою, як і в попередньому випадку, лише перевернута набік:

$$= \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(p_2)$$

<sup>23</sup>Такий аналіз є в книзі Берестецького, Ліфшица і Пітаєвського [8].

Зв'язок між процесами  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  і  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$  стає очевидним, коли ми обчислимо квадрат амплітуди, усереднений і підсумований за спінами:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} \left[ (\not{p}_1' + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu \right] \times \\ \times \text{Tr} \left[ (\not{p}_2' + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\nu \right].$$

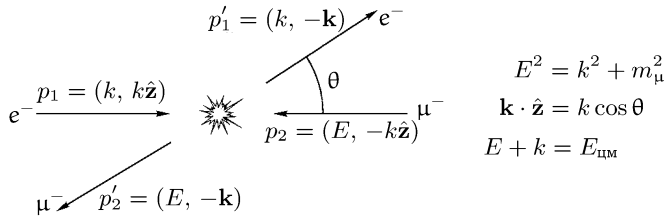
Цей вираз стане тотожним нашому результату (5.2) для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , якщо зробити підстановки

$$p \rightarrow p_1, \quad p' \rightarrow -p_1', \quad k \rightarrow p_2', \quad k' \rightarrow -p_2. \quad (5.60)$$

А тому, замість ще одного обчислення слідів, ми можемо просто провести таку ж заміну у формулі (5.10). Встановивши  $m_e = 0$ , знаходимо

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[ (p_1 \cdot p_2')(p_1' \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2') - m_\mu^2(p_1 \cdot p_1') \right]. \quad (5.61)$$

Для продовження розрахунків маємо з'ясувати кінематику процесу, яка тепер цілком інша. Обравши за систему відліку центр мас, знову перейдемо до основних кінематичних змінних, енергії та кута розсіяння:



Потрібні нам комбінації є

$$p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2' = k(E + k); \quad p_1' \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2' = k(E - k \cos \theta); \\ p_1 \cdot p_2' = k^2(1 - \cos \theta); \quad q^2 = -2p_1 \cdot p_1' = -2k^2(1 - \cos \theta).$$

Наш вираз для квадрату стає таким:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{k^2(1 - \cos \theta)^2} \times \\ \times \left[ (E + k)^2 + (E + k \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta) \right]. \quad (5.62)$$

Для знаходження перерізу використаємо формулу (4.84), яка за умови, коли одна з часток є безмасовою, набуває простого вигляду:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{цм}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E + k)^2}. \quad (5.63)$$

Звідси одержуємо результат для електрон-мюонного розсіяння в системі ЦМ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2k^2(E+k)^2(1-\cos\theta)^2} \times \left[ (E+k)^2 + (E+k\cos\theta)^2 - m_\mu^2(1-\cos\theta) \right]. \quad (5.64)$$

де  $k = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$ . У високоенергетичному наближенні ми можемо знехтувати й масою мюона, і тоді диференціальний переріз розсіяння:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{ЦМ}}^2(1-\cos\theta)^2} [4 + (1+\cos\theta)^2]. \quad (5.65)$$

Звернімо увагу на сингулярну поведінку

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \text{при } \theta \rightarrow 0 \quad (5.66)$$

у формулах (5.64) і (5.65). Ця сингулярність є такою ж, як і у формулі Резерфорда (Задача 4.4). Така поведінка завжди присутня при кулоновому розсіянні; вона виникає через близькість до масової поверхні (тобто,  $q^2 \approx 0$ ) віртуального фотона.

### Кросинг-симетрія

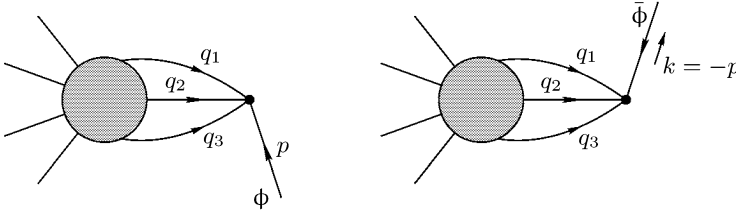
Застосований нами прийом для встановлення зв'язку між процесами  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  і  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$  є першим прикладом такого типу перетворень, відомих як *кросинг-симетрія*. В загальному випадку  $S$ -матриця будь-якого процесу, в якому бере участь частка з 4-імпульсом  $p$  в початковому стані, є еквівалентною  $S$ -матриці для в усьому іншому ідентичного процесу, але з античасткою в кінцевому стані з 4-імпульсом  $k = -p$ . Тобто,

$$\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \dots + \bar{\phi}(k)), \quad (5.67)$$

де  $\bar{\phi}$  є античасткою до  $\phi$ , а  $k = -p$ . (Зазначимо, що за будь-яких обставин  $p$  і  $k$  не можуть одночасно мати фізично припустимі значення, оскільки для частки повинна виконуватись умова  $p^0 > 0$ , а для античастки  $k^0 > 0$ . Отже, на практиці одну амплітуду можна отримати з іншої лише за допомогою аналітичного продовження.)

Співвідношення (5.67) прямо впливає з фейнманових правил. Діаграми, що роблять внесок у ці дві амплітуди, природним чином взаємо-

пов'язані й різняться між собою лише заміною вхідного  $\Phi$  на вихідне  $\bar{\Phi}$ . Типова пара таких діаграм має вигляд



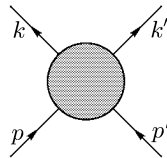
На першій діаграмі імпульси  $q_i$ , що входять у вершину з решти діаграми, мають дати в підсумку  $-p$ , тоді як на другій діаграмі їхня сума дорівнює  $k$ . Отже, якщо  $-p = k$ , то ці дві діаграми однакові, за винятком можливої різниці у множниках за зовнішніми лініями. Якщо  $\Phi$  є скалярним бозоном, то такі множники відсутні, і тотожність (5.67) доведено. Для ферміона аналіз стає складнішим, оскільки співвідношення залежить від домовленостей про відносні фази зовнішніх спинорів  $u$  і  $v$ . Просто замінивши  $p$  на  $-k$  в сумі за поляризаціями ферміонів, ми отримаємо

$$\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum v(k)\bar{v}(k). \quad (5.68)$$

Знак мінус можна компенсувати зміною домовленості про фазу для  $v$ . На практиці зручніше взагалі відкидати один знак мінус для кожного кросингового ферміона. При відповідних домовленостях для спинорів  $u(p)$  і  $v(k)$  можна довести тотожність (5.67) без усереднення за спінами.

### Мандельштамові змінні

Інколи зручно записувати амплітуду розсіяння через такі змінні, які спрощують застосування кросингових перетворень. Для процесів  $2 \text{ частки} \rightarrow 2 \text{ частки}$  це можна зробити наступним чином. Позначимо чотири зовнішні імпульси, як



Тепер визначимо нові величини, *мандельштамові змінні*:

$$\begin{aligned} s &= (p + p')^2 = (k + k')^2; \\ t &= (k - p)^2 = (k' - p')^2; \\ u &= (k' - p)^2 = (k - p')^2. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Величини  $t$  і  $u$  переходять одна в іншу при заміні  $k \leftrightarrow k'$ ; прийнято визначати  $t$  як квадрат різниці початкового та кінцевого імпульсів двох найбільш схожих часток. Для будь-якого процесу  $s$  є квадратом повного початкового 4-імпульсу. Зауважимо, що в разі, коли ми визначимо всі чотири імпульси як вхідні, значення всіх трьох величин будуть позитивними.

Для ілюстрації застосування мандельштамових змінних, передовсім розглянемо квадрат амплітуди для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , взявши для простоти безмасове наближення. За цієї умови ми маємо  $t = -2p \cdot k = -2p' \cdot k'$ ,  $u = 2p \cdot k' = -2p' \cdot k$  і, певна річ,  $s = (p + p')^2 = q^2$ . Посилаючись на наш попередній результат (5.10), знаходимо

$$\begin{array}{c} \mu^- \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} \mu^+ \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ e^+ \end{array} = \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[ \left( \frac{t}{2} \right)^2 + \left( \frac{u}{2} \right)^2 \right]. \quad (5.70)$$

Для переходу до процесу  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  повернемо діаграму набік і застосуємо кросингові перетворення, які стають надзвичайно простими в термінах мандельштамових змінних. Наприклад, вони стверджують, що можна змінити знак імпульсу позитрона  $p'$  і реінтерпретувати його, як імпульс вихідного електрона. Таким чином,  $s = (p + p')^2$  обертається на  $t$  — різницю імпульсів вихідного і вхідного електронів. Відповідно,  $t$  переходить у  $s$ , а  $u$  не змінюється. Тому для  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  ми можемо негайно записати

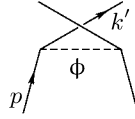
$$\begin{array}{c} e^- \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} \mu^- \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \mu^- \end{array} = \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[ \left( \frac{s}{2} \right)^2 + \left( \frac{u}{2} \right)^2 \right]. \quad (5.71)$$

Легко переконатися, що цей вираз узгоджується з (5.61) у безмасовому наближенні. Зазначимо, що попри значну схожість (5.70) і (5.71), фізично вони зовсім різні: у першому виразі знаменник є просто  $s^2 = E_{\text{цм}}^4$ , а другий містить змінну  $t$ , що є залежна від кутів і прагне до нуля при  $\theta \rightarrow 0$ .

Якщо діаграма процесу  $2 \text{ частки} \rightarrow 2 \text{ частки}$  містить лише одну віртуальну частку, її зручно описувати як таку, що перебуває в певному „каналі“. Самі канали можна визначити з вигляду фейнманових діаграм, і кожен з них призводить до характерної залежності перерізу від кута:

$$\begin{array}{ll} \text{s-канал:} & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \phi \\ | \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad p' \end{array} & \mathcal{M} \propto \frac{1}{s - m_\phi^2}; \\ \text{t-канал:} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ | \\ \phi \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \\ k \quad p \end{array} & \mathcal{M} \propto \frac{1}{t - m_\phi^2}; \end{array}$$

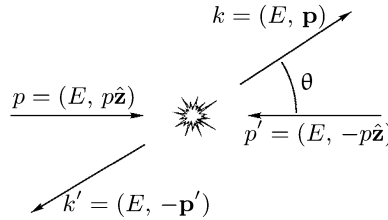
u-канал:



$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{u - m_\phi^2}.$$

Багато процесів відбуваються більш ніж по одному каналу, і внески від кожного з них мають когерентно додаватися. Так, амплітуда розсіяння *Бабі*  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  є сумою діаграм s- і t-каналів, а розсіяння *Моллера*  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  проходить по каналах t і u.

Щоб краще відчувати змінні s, t і u, обчислимо їх у явному вигляді для часток однакої маси  $m$  у системі ЦМ. Кінематика має звичайний вигляд:



Тому мандельштамові змінні є

$$\begin{aligned} s &= (p + p')^2 = (2E)^2 = E_{\text{цм}}^2; \\ t &= (k - p)^2 = -p^2 \sin^2 \theta - p^2 (\cos - 1)^2 = -2p^2 (1 - \cos \theta); \\ u &= (k' - p)^2 = -p^2 \sin^2 \theta - p^2 (\cos + 1)^2 = -2p^2 (1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Звідси ми бачимо, що  $t \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow 0$ , а  $u \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow \pi$ . (Коли маси різні, граничні значення t і u трохи зсуваються.)

З (5.72) випливає, що для однакових мас  $m$  усіх чотирьох часток сума мандельштамових змінних є  $s + t + u = 4E^2 - 4p^2 = 4m^2$ . Це окремий випадок загального співвідношення, яке часто буває корисним:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (5.73)$$

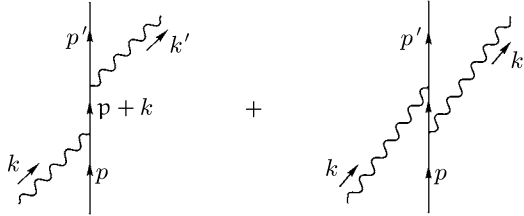
де сума береться за всіма чотирма зовнішніми частками. Цю тотожність легко довести, підсумувавши всі члени у правій половині (5.69) і застосувавши закон збереження 4-імпульсу у вигляді  $(p + p' - k - k')^2 = 0$ .

## § 5.5. Комптонове розсіяння

Розглянемо тепер процес, дещо відмінний від тих, з якими ми досі мали справу, — *комптонове розсіяння*, або  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ . Обчислимо його неполяри-

зований переріз у нижчому порядку за  $\alpha$ . В наших розрахунках ми застосуємо весь арсенал розглянутих нами методів, зокрема мандельштамові змінні з попереднього параграфу. Також розвинемо нову техніку для роботи з зовнішніми фотонами.

Ось наш перший приклад обчислення внесків двох діаграм:



За вже звичним порядком, фейнманові правила вказують нам, як записати вираз для  $\mathcal{M}$ . Зазначимо, що оскільки ферміонні частини на обох діаграмах однакові, то між двома доданками не виникає відносного знаку мінус. Записавши вектори поляризації початкового та кінцевого фотонів, як  $\varepsilon_\nu(k)$  і  $\varepsilon_\mu^*(k')$ , маємо

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(k') \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k)u(p) + \\
 &\quad + \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k) \frac{i(\not{p} + \not{k}' + m)}{(p+k')^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(k')u(p) = \\
 &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p') \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p} + \not{k}' + m)\gamma^\mu}{(p+k')^2 - m^2} \right] u(p).
 \end{aligned}$$

Перш ніж підносити цей вираз до квадрату, ми можемо зробити певні спрощення. Оскільки  $p^2 = m^2$  і  $k^2 = 0$ , то знаменники пропагаторів є

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p \cdot k \quad \text{і} \quad (p+k')^2 - m^2 = -2p \cdot k'.$$

Для спрощення чисельників скористаємося алгеброю Дірака:

$$\begin{aligned}
 (\not{p} + m)\gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + \gamma^\nu m) u(p) = \\
 &= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu (\not{p} - m) u(p) = \\
 &= 2p^\nu u(p).
 \end{aligned}$$

Застосувавши цей прийом до чисельника кожного пропагатора, знаходимо

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p') \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p \cdot k'} \right] u(p). \tag{5.74}
 \end{aligned}$$



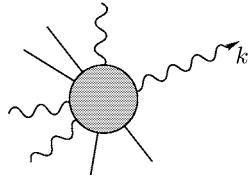
### Суми фотонних поляризацій

Наступним кроком у наших розрахунках має бути піднесення до квадрату виразу для  $\mathcal{M}$  і підсумовування (або усереднення) за станами поляризації електронів та фотонів. Суму за електронними поляризаціями можна обчислити як і раніше, скориставшись тотожністю  $\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m$ . На щастя, існує схожий прийом і для отримання суми за поляризаціями фотона. Правильний рецепт полягає в тому, щоб здійснити заміну

$$\sum_{\text{поляризація}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (5.75)$$

Стрілка замість знака рівності вказує, що це не є справжньою тотожністю. А проте, така заміна виправдана, поки  $\epsilon_\nu$  і  $\epsilon_\mu^*$  входять до виразу для амплітуди  $\mathcal{M}$ .

Для виведення цієї формули розглянемо довільний процес КЕД, який має зовнішню фотонну лінію з імпульсом  $k$ :



$$= i\mathcal{M}(k) \equiv \mathcal{M}^\mu(k) \epsilon_\mu^*(k). \quad (5.76)$$

Оскільки амплітуда завжди містить  $\epsilon_\mu^*(k)$ , ми винесли цей множник окремо і визначили  $\mathcal{M}^\mu(k)$  як решту складових амплітуди  $\mathcal{M}$ . Переріз має бути пропорційним до

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon_\mu^*(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 = \sum_{\epsilon} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k).$$

Для простоти зорієнтуємо  $k$  в напрямку осі  $z$ , тоді  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ . У цьому разі два вектори поперечної поляризації, за якими ми беремо суму, можна обрати такими:

$$\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0); \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0).$$

З урахуванням цих домовленостей, маємо

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon_\mu^*(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 = |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2. \quad (5.77)$$

Тепер згадаймо з Розділу 4, що зовнішні фотонні лінії породжуються взаємодією  $\int d^4x e j^\mu A_\mu$ , де  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  — діраковий вектор струму. Таким чином,  $\mathcal{M}^\mu(k)$  має визначатися матричним елементом гайзенбергового поля  $j^\mu$ :

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle, \quad (5.78)$$

де початковий та кінцевий стани включають у себе всі частки, крім нашого фотона.

З класичних рівнянь руху ми знаємо, що струм  $j^\mu$  зберігається:  $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ . Вважаючи, що це справедливо і в квантовій теорії, ми можемо помножити (5.78) на  $k_\mu$  і тоді отримаємо

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (5.79)$$

Амплітуда  $\mathcal{M}$  обертається на нуль, якщо замінити вектор поляризації фотона  $\varepsilon_\mu(k)$  на  $k_\mu$ . Це знамените співвідношення відоме як *тотожність Варда*. Власне, це є твердженням про збереження струму, що впливає з калібровочної симетрії (4.6) КЕД. Ми дамо формальне доведення тотожності Варда у § 7.4 і обговоримо деякі тонкощі, що не були враховані в цьому швидкому „виведенні“.

Буде корисно прямо перевірити, що комптонова амплітуда (5.74) задовольняє тотожності Варда. Для цього замінимо  $\varepsilon_\nu(k)$  на  $k_\nu$ , або  $\varepsilon_\mu^*(k')$  на  $k_\mu'$ , і проведемо певні маніпуляції з добутками діракових матриць. В обох випадках, після нескладних алгебраїчних вправ, доданки від однієї та іншої діаграм взаємно скоротяться, і в кінцевому підсумку ми отримаємо нуль.

Повертаючись до виведення формули (5.75) для суми за поляризаціями, ми зауважуємо, що для  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ , тотожність Варда набуває вигляду

$$k\mathcal{M}^0(k) - k\mathcal{M}^3(k) = 0. \quad (5.80)$$

Отже,  $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$ , і ми маємо

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k) &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 = \\ &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 = \\ &= -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k). \end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо взяти суму за поляризаціями зовнішніх фотонів, просто замінивши  $\sum \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu$  на  $-g_{\mu\nu}$ .

Це дозволяє нам (звичайно, за умови, що згодом ми в загальному вигляді доведемо тотожність Варда) вільно відкидати в обчисленнях КЕД нефізичні часоподібні та поздовжні фотони, бо для будь-якого процесу квадрат амплітуд народження таких станів взаємно скорочуються. Негативна норма стану часоподібного фотона, що викликала в нас занепокоєння при обговоренні формули (4.134), відіграє в цьому скороченні істотну роль.

### Формула Кляйна – Нішіни

Решта обчислень комптонового розсіяння не вимагає жодних хитрощів, а лише певного упорядкування. Ми хочемо усереднити квадрат амплітуди за

поляризаціями початкових електрона та фотона і підсумувати за поляризаціями кінцевих електрона та фотона. Починаючи з виразу (5.74) для  $\mathcal{M}$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \times \\ &\times \text{Tr} \left\{ (\not{p}' + m) \left[ \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right] \times \right. \\ &\times (\not{p} + m) \left[ \frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not{k}' \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p^\sigma}{2p \cdot k'} \right] \Bigg\} \equiv \\ &\equiv \frac{e^4}{4} \left[ \frac{\text{Tr}_1}{(2p \cdot k)^2} + \frac{\text{Tr}_2}{(2p \cdot k)(2p \cdot k')} + \frac{\text{Tr}_3}{(2p \cdot k')(2p \cdot k)} + \frac{\text{Tr}_4}{(2p \cdot k')^2} \right], \end{aligned} \quad (5.81)$$

де через  $\text{Tr}_1$ ,  $\text{Tr}_2$ ,  $\text{Tr}_3$  і  $\text{Tr}_4$  позначені складні сліди. Зазначимо, що  $\text{Tr}_4$  переходить у  $\text{Tr}_1$ , якщо замінити  $k$  на  $-k'$ . Також, оскільки, згідно з (5.7), можна обернути порядок  $\gamma$ -матриць під слідом, ми бачимо, що  $\text{Tr}_2 = \text{Tr}_3$ . Отож ми маємо обчислити лише  $\text{Tr}_1$  і  $\text{Tr}_2$ .

Перший із слідів є

$$\text{Tr}_1 = \text{Tr} [(\not{p}' + m)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 3\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m)(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu)].$$

Маємо шістнадцять доданків під знаком сліду, але половина з них містить непарну кількість  $\gamma$ -матриць, а тому обертається на нуль. Тепер обчислимо, один за одним, решту вісім доданків. Наприклад,

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu] &= \text{Tr} [(-2\not{p}') \not{k} (-2\not{p}) \not{k}] = \\ &= \text{Tr} [4\not{p}' \not{k} (2p \cdot k - \not{k} \not{p})] = \\ &= 8p \cdot k \text{Tr} [\not{p}' \not{k}] = \\ &= 32(p \cdot k)(p' \cdot k). \end{aligned}$$

Застосувавши тотожності згортання (5.8) і (5.9) та інші співвідношення діракової алгебри на зразок  $\not{p}\not{p} = p^2 = m^2$ , ми можемо звести кожен доданок у  $\text{Tr}_1$  до сліду від добутку не більше ніж двох  $\gamma$ -матриць. Коли дим розвіється, знайдемо

$$\text{Tr}_1 = 16(4m^4 - 2m^2 p \cdot p' + 4m^2 p \cdot k - 2m^2 p' \cdot k + 2(p \cdot k)(p' \cdot k)). \quad (5.82)$$

Хоча це не очевидно, наш вираз можна спростити й далі. Щоб побачити, як це зробити, запровадимо мандельштамові змінні

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = 2p \cdot k + m^2 = 2p' \cdot k' + m^2; \\ t &= (p' - p)^2 = -2p \cdot p' + 2m^2 = -2k \cdot k'; \\ u &= (k' - p)^2 = -2k' \cdot p + m^2 = -2k \cdot p' + m^2. \end{aligned} \quad (5.83)$$

З (5.73) згадаємо, що збереження 4-імпульсу призводить до  $s + t + u = 2m^2$ . Перепишавши все в термінах змінних  $s$ ,  $t$ ,  $u$  і застосувавши цю тотожність, одержимо

$$\text{Tr}_1 = 16(2m^4 + m^2(s - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)). \quad (5.84)$$

Здійснивши заміну  $k \leftrightarrow -k'$ , ми можемо негайно записати

$$\text{Tr}_4 = 16(2m^4 + m^2(u - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)). \quad (5.85)$$

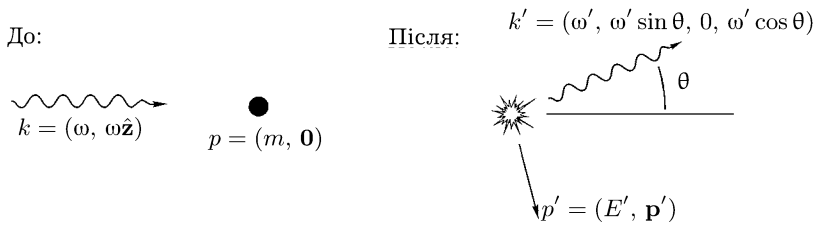
Обчислення слідів  $\text{Tr}_2$  і  $\text{Tr}_3$  вимагає приблизно такого ж обсягу роботи, яку ми вже провели. Результат буде

$$\text{Tr}_2 = \text{Tr}_3 = -8(4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)). \quad (5.86)$$

Зібравши разом усі частини квадрату матричного елемента (5.81) і перепишавши  $s$  та  $u$  через  $p \cdot k$  і  $p \cdot k'$ , остаточно маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 & \left[ \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \right. \\ & \left. + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Щоб отримати з цього виразу переріз, треба обрати систему відліку і зобразити кінематику процесу. Найчастіше комптонове розсіяння розглядається в „лабораторній“ системі, де електрон початково перебуває в стані спокою:



Ми збираємося записати переріз розсіяння через параметри  $\omega$  і  $\theta$ . Енергію кінцевого стану фотона  $\omega'$  можна знайти, скориставшись таким прийомом:

$$\begin{aligned} m^2 &= (p')^2 = (p + k - k')^2 = p^2 + 2p \cdot (k - k') - 2k \cdot k' = \\ &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

отже,

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \theta). \quad (5.88)$$

Останній рядок є формулою Комптона для зміни довжини хвилі фотона. Проте для наших цілей корисніше явно виписати вираз для  $\omega'$ :

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}. \quad (5.89)$$

Інтеграл по фазовому простору в цій системі відліку є

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} \frac{1}{2E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) = \\ &= \int \frac{(\omega')^2 d\omega' d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega' E'} \times \\ &\quad \times 2\pi \delta\left(\omega' + \sqrt{m^2 + \omega^2 + (\omega')^2 - 2\omega\omega' \cos \theta} - \omega - m\right) = \\ &= \int \frac{d \cos \theta}{2\pi} \frac{\omega'}{4E'} \frac{1}{\left|1 + \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{E'}\right|} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d \cos \theta \frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos \theta)} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d \cos \theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Підставляючи всі вирази в нашу загальну формулу для перерізу (4.79) і встановивши  $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}| = 1$ , знаходимо

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{1}{2\omega} \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} \cdot \left( \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 \right).$$

Для обчислення  $|\mathcal{M}|^2$  замінимо в (5.87)  $p \cdot k = m\omega$  і  $p \cdot k' = m\omega'$ . Остаточний результат:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right], \quad (5.91)$$

де  $\omega'/\omega$  береться з виразу (5.89). Це є усереднена за спінами *формула Кляйна-Нішіни*, яку вперше було виведено в 1929 році.<sup>24</sup>

<sup>24</sup>O. Klein, Y. Nishina, *Z. Physik*, 52, 853 (1929).

У межі  $\omega \rightarrow 0$  ми бачимо з (5.89), що  $\omega'/\omega \rightarrow 1$ , і вираз для перерізу набуває вигляду

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1 + \cos^2\theta); \quad \sigma_{\text{total}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \quad (5.92)$$

Це відома формула Томсона для перерізу розсіяння класичного електромагнітного випромінювання на вільному електроні.

### Поведінка при високих енергіях

Для аналізу поведінки перерізу комптонового розсіяння при високих енергіях найзручніше працювати в системі центру мас. Щоб отримати диференціальний переріз у цій системі, скористаємося інваріантним виразом (5.87). Кінематика реакції тепер виглядатиме так:

$$k' = (\omega, \omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta)$$

$$k = (\omega, \omega \hat{z})$$

$$p = (E, -\omega \hat{z})$$

$$p' = (E', -\omega' \hat{z})$$

$$p \cdot k = \omega(E + \omega)$$

$$p \cdot k' = \omega(E + \omega \cos \theta)$$

$$E^2 = \omega^2 + m^2$$

Підставивши ці величини у (5.87), ми побачимо, що при  $\theta \approx \pi$ , член  $p \cdot k / p \cdot k'$  стає дуже великим, тоді як решта доданків мають порядок  $\mathcal{O}(1)$  або менший. Отже, при  $E \gg m$  і  $\theta \approx \pi$  маємо

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \cdot \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} = 2e^4 \cdot \frac{E + \omega}{E + \omega \cos \theta}. \quad (5.93)$$

Переріз у системі ЦМ визначається з (4.84):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2E} \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\omega}{(2\pi)4(E + \omega)} \cdot \frac{2e^4(E + \omega)}{E + \omega \cos \theta} \approx \\ &\approx \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + s(1 + \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Зазначимо, що оскільки  $s \gg m^2$ , знаменник у (5.94) стає майже нульовим, коли фотон випромінюється у зворотному напрямку ( $\theta \approx \pi$ ). Фактично, масою електрона в цій формулі можна було б цілком знехтувати, якби не потреба обрізати цю сингулярність. Інтегруючи по  $\cos \theta$ , ми можемо

відкинути член з масою електрона, замінивши його еквівалентним обріданням біля  $\theta = \pi$ . При цьому наближене значення повного перерізу комптонового розсіяння буде

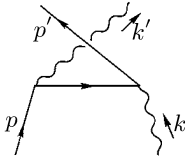
$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s} \int_{-1+\frac{2m^2}{s}}^1 d(\cos \theta) \frac{1}{(1 + \cos \theta)}. \quad (5.95)$$

Таким чином, знаходимо, що повний переріз при високих енергіях поводить ся, як

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \log\left(\frac{s}{m^2}\right). \quad (5.96)$$

Головна залежність  $\alpha^2/s$  впливає з розмірного аналізу. Проте сингулярність, пов'язана з розсіянням фотона у зворотному напрямку, призводить до появи додаткового множника у вигляді логарифму від енергії.

Спробуємо зрозуміти фізичне значення цієї сингулярності. Вона виникає з квадрату діаграми  $u$ -каналу:



$$= -ie^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu(k') \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p - k')^2 - m^2} \gamma^\nu u(p). \quad (5.97)$$

При  $\theta \approx \pi$  амплітуда стає великою, оскільки знаменник пропагатора малий ( $\sim m^2$ ) порівняно з  $s$ . Для більшої точності введемо  $\chi \equiv \pi - \theta$ . Нас цікавлять значення  $\chi$ , дещо більші за  $m/\omega$ , та все ж досить малі, щоб ми могли застосувати наближення  $1 - \cos \chi \approx \chi^2/2$ . Для таких  $\chi$  маємо

$$\begin{aligned} (p - k')^2 - m^2 &= -2p \cdot k' \approx -2\omega^2 \left( \frac{m^2}{2\omega^2} + 1 - \cos \chi \right) \approx \\ &\approx -(\omega^2 \chi^2 + m^2). \end{aligned} \quad (5.98)$$

В обраному нами діапазоні значень  $\chi$  цей вираз малий порівняно з  $s$ , що й дає зростання повного перерізу.

Повертаючись до (5.93), ми бачимо, що при  $m/\omega \ll \chi \ll 1$  квадрат амплітуди є пропорційним до  $1/\chi^2$ , а отже, маємо очікувати, що  $\mathcal{M} \propto 1/\chi$ . Проте, як ми щойно бачили, знаменник  $\mathcal{M}$  пропорційний  $\chi^2$ , тому зайвий степінь  $\chi$  мусить компенсуватися відповідним множником у чисельнику. Ми можемо зрозуміти фізичне походження цього множника, розглянувши амплітуду для окремого набору електронних та фотонних поляризацій.

Припустимо, що початковий електрон є правополяризованим. У знаменнику пропагатора в (5.97) можемо знехтувати  $m$  порівняно з  $(\not{p} - \not{k}')$ .

Оскільки цей член містить три  $\gamma$ -матриці між  $\bar{u}$  та  $u$ , то кінцевий електрон також має бути правополяризованим. Отже, амплітуда є

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu^*(k') u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \frac{\bar{\sigma} \cdot (p - k')}{-(\omega^2 \chi^2 + m^2)} \sigma^\nu u_R(p), \quad (5.99)$$

де

$$u_R(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad u_R(p') = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.100)$$

Якщо початковий фотон лівополяризований (його вектор поляризації є  $\varepsilon_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0)$ ), то

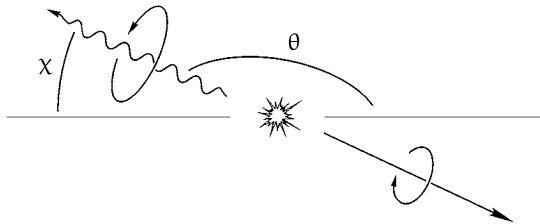
$$\sigma^\mu \varepsilon_\mu(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

і комбінація  $u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \varepsilon_\mu(k)$  обертається на нуль. Тому початковий фотон мусить бути правополяризованим. Аналогічним чином можна показати, що амплітуда стає нульовою, якщо й кінцевий фотон не є правополяризованим. Кінематична ситуація для такого набору поляризацій зображена на Рис. 5.6. Відзначимо, що повний спіновий момент у кінцевому стані на одиницю менший, ніж у початковому.

До:



Після:



**Рис. 5.6.** У наближенні високих енергій найвірогідніше, що фотон розсіється у протилежному до електрона напрямку. Оскільки спіральність зберігається, одиничне значення спінового моменту перетворюється на орбітальний момент імпульсу.



Продовжуючи наші обчислення, розглянемо чисельник пропагатора в (5.99). У потрібному нам діапазоні значень  $\chi$  переважний внесок дає член

$$-\sigma^1(p - k')^1 = \sigma^1 \cdot \omega\chi.$$

Це саме той множник з  $\chi$ , появу якого ми передбачали вище. Він засвідчує, що кінцевий стан є  $p$ -хвилею, як того й вимагає збереження моменту імпульсу. Збираючи всі частини до купи, маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(e_R^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_R) &\approx e^2 \sqrt{2E} \sqrt{2} \frac{\omega\chi}{(\omega^2\chi^2 + m^2)} \sqrt{2E} \sqrt{2} \approx \\ &\approx \frac{4e^2\chi}{\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Такий самий результат ми одержимо у випадку, коли всі початкові та кінцеві частки лівополяризовані.

Зауважимо, що при розсіянні у точно протилежному напрямку,  $\chi = 0$ , матричний елемент (5.101) обертається на нуль через нульовий момент імпульсу в чисельнику. Отже, при  $\theta$ , близькому до  $\pi$ , ми мусимо враховувати в чисельнику пропагатора в (5.97) також і доданок з масою. Він містить лише дві гамма-матриці, а тому перетворює правополяризований електрон на лівополяризований. Провівши аналіз, подібний до того, що дав у підсумку вираз (5.101), ми можемо побачити, що ця амплітуда не є нульовою лише в тому разі, коли початковий фотон лівополяризований, а кінцевий — правополяризований. У підсумку:

$$\mathcal{M}(e_R^- \gamma_L \rightarrow e_L^- \gamma_R) \approx \frac{4e^2 \frac{m}{\omega}}{\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}}. \quad (5.102)$$

Реакція  $e_L^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_L$  дає такий самий матричний елемент.

Для порівняння цих результатів з нашими попередніми обчисленнями маємо скласти внески (5.101) і (5.102) з аналогічними внесками для реакцій з початковими лівополяризованими електронами і поділити на 4 для усереднення за початковими спінами. Неполяризований диференціальний

переріз буде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2E} \frac{1}{2\omega} \frac{\omega}{(2\pi)4(E+\omega)} \times \\ &\times \left[ \frac{8e^4\chi^2}{\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} + \frac{8e^4\frac{m^2}{\omega^2}}{\left(\chi^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\right)^2} \right] = \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{s\left(\chi^2 + \frac{4m^2}{s}\right)}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

що точно збігається з (5.94).

Важливість процесу з оберненням спіральності (5.102) у кінематично граничній точці  $\theta = \pi$  має цікавий експериментальний наслідок. Розглянемо процес *зворотного* комптонового розсіяння — зіткнення високоенергетичного електронного пучка з фотонним пучком низької енергії (скажімо, з лазерним променем) для утворення високоенергетичних фотонів. Нехай електрони мають енергію  $E$ , а „лазерні“ фотони —  $\bar{\omega}$ . Позначимо енергію розсіяного фотона, як  $E' = yE$ , і припустимо для простоти, що  $s = 4E\bar{\omega} \gg m^2$ . Тоді ми можемо застосувати проведені нами обчислення до цієї ситуації, коли фотони з найбільшою енергією утворюються від розсіяння під кутом  $\theta = \pi$  в системі центру мас. Обчисливши  $2k \cdot k'$  у лабораторній системі і в ЦМ, легко показати, що енергія кінцевого фотона співвідноситься з кутом розсіяння в системі ЦМ таким чином:

$$y \approx \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \approx 1 - \frac{\chi^2}{4}.$$

Тоді (5.103) можна переписати як формулу для розподілу енергії розсіяних у зворотному напрямку фотонів біля граничної точки:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{s\left((1-y) + \frac{16m^2}{s}\right)^2} \left[ (1-y) + \frac{16m^2}{s} \right], \quad (5.104)$$

де перший доданок у квадратних дужках відповідає процесу зі збереженням спіральності, а другий — з її оберненням. Так, наприклад, якщо правополяризований лазерний промінь розсіюється на неполяризованому пучку високоенергетичних електронів, то більшість розсіяних назад фотонів матиме праву поляризацію, але високоенергетичні фотони будуть лівополяризованими. Цей ефект можна використати для експериментального

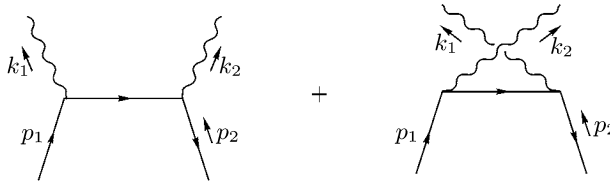
визначення поляризації електронного пучка або для створення високоенергетичного фотонного джерела з регульованим розподілом за енергією та поляризацією.

### Анігіляція пар у фотони

Ми можемо отримати це один результат з амплітуди комптонового розсіяння. Розглянемо процес анігіляції

$$e^+ e^- \rightarrow 2\gamma,$$

який у нижчому порядку дає діаграми



Цей процес пов'язаний з комптоновим розсіянням через кросинг-симетрію; його амплітуду можна одержати з комптонової шляхом заміни

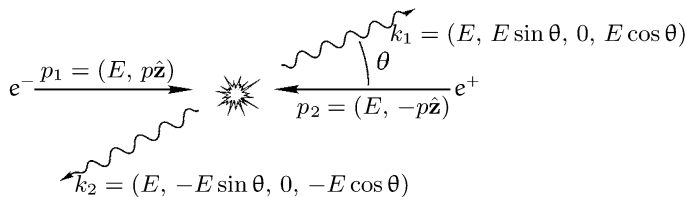
$$p \rightarrow p_1 \quad p' \rightarrow -p_2 \quad k \rightarrow -k_1 \quad k' \rightarrow k_2.$$

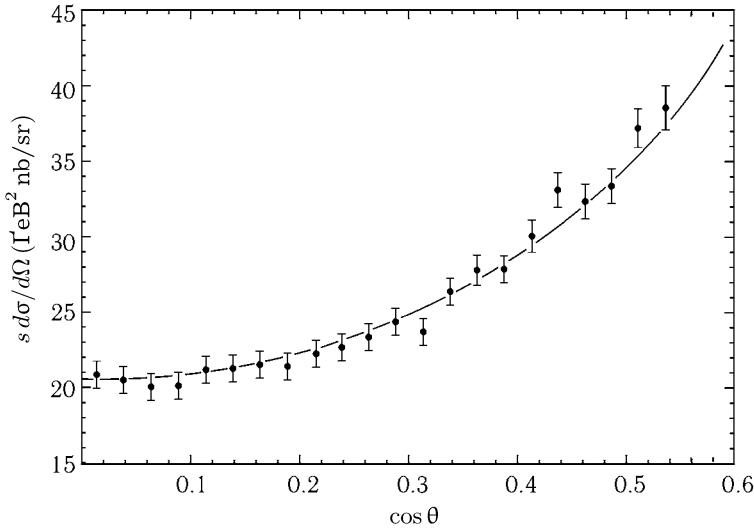
Здійснивши таку підстановку в (5.87), знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спіни}} |\mathcal{M}|^2 = & -2e^4 \left[ \frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + 2m^2 \left( \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right) - \right. \\ & \left. - m^4 \left( \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Загальний знак мінус є наслідком кросингових перетворень (5.68), і ним можна знехтувати.

Тепер перейдемо до системи ЦМ. Кінематика процесу:





**Рис. 5.7.** Кутова залежність перерізу  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  при  $E_{\text{цм}} = 29$  GeV, одержана колаборацією HRS (M. Derrick, et. al., *Phys. Rev. D* 34, 3286 (1986)). Суцільна лінія показує теоретичні розрахунки за формулою (5.107).

Вже звичні обчислення дають диференційний переріз:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{p}\right) \times \left[ \frac{E^2 + p^2 \cos^2\theta}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]. \quad (5.106)$$

У межі високих енергій цей вираз набуває вигляду

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \xrightarrow{E \gg m} \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right), \quad (5.107)$$

за винятком проміжку, де  $\sin\theta$  має порядок  $m/p$  або менший. Зауважимо, що оскільки обидва фотони тотожні, то всі кінцеві стани будуть враховані інтегруванням у діапазоні  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Тому повний переріз є

$$\sigma_{\text{total}} = \int_0^1 d(\cos\theta) \frac{d\sigma}{d\cos\theta}.$$

На Рис. 5.7 порівнюється асимптотична формула (5.107) для диференційного перерізу з результатами вимірювання перерізу анігіляції електрон-позитронної пари у два фотони при дуже високих енергіях.

## Задачі

**5.1. Кулонове розсіяння.** Повторіть обчислення з Задачі 4.4, пункт (с), використавши цього разу повний релятивістський вираз для матричного елемента. Ви маєте встановити, що усереднений за спінами переріз є

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}\right),$$

де  $\mathbf{p}$  — 3-імпульс електрона, а  $\beta$  — його швидкість. Це є *формула Мотта* для кулонового розсіяння релятивістських електронів. Тепер виведіть цю формулу іншим шляхом, скориставшись перерізом електрон-мюонного розсіяння у системі спокою мюона і зберігши масу електрона за умови, що  $m_\mu \rightarrow \infty$ .

**5.2. Розсіяння Баба.** Обчисліть диференційний переріз  $d\sigma/d \cos \theta$  для розсіяння Баба  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ . Можете працювати в наближенні  $E_{\text{цм}} \gg m_e$ , що дозволяє знехтувати масою електрона. Маєте дві фейнманові діаграми, внешне від яких перед піднесенням до квадрату треба додати для отримання інваріантного матричного елемента. Поставтеся уважно до визначення правильного відносного знака між цими діаграмами. Проміжні обчислення є досить складними, але остаточний результат доволі простий. Зокрема, ви можете виявити, що його корисно записати через мандельштамові змінні  $s, t, u$ . Зазначимо, що в наближенні нульової маси електрона,  $u + s + t = 0$ . Тоді ви зможете привести диференційний переріз до вигляду

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{s} \left[ u^2 \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left( \frac{t}{s} \right)^2 + \left( \frac{s}{t} \right)^2 \right].$$

Перепишіть цю формулу через  $\cos \theta$  і зобразіть її графік. Чому переріз розбігається при  $\theta \rightarrow 0$ ?

**5.3. Формалізм спінових добутоків,** запроваджений у Задачі 3.3, дозволяє ефективно обчислювати деревовидні діаграми з безмасовими частками. Нехай  $u_{L0}$  і  $u_{R0}$  є правим та лівим спінорами при певному світлоподібному імпульсі  $k_0$ . Вони задовольняють умовам

$$u_{L0} \bar{u}_{L0} = \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \not{k}_0, \quad u_{R0} \bar{u}_{R0} = \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \not{k}_0. \quad (1)$$

(Ці співвідношення є просто проекціями загальнішої формули  $\sum u_0 \bar{u}_0 = \not{k}_0$  на стани з визначеною спіральністю.) Далі визначимо спінори для будь-якого іншого світлоподібного імпульсу  $p$ , як

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0}, \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}. \quad (2)$$

Ми показали, що для цих спінорів виконується умова  $\not{p}u(p) = 0$ ; оскільки ніде не присутня  $m$ , то ці спінори можна використовувати як для ферміонів, так і для антиферміонів. Визначимо

$$s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1)u_L(p_2), \quad t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1)u_R(p_2).$$

У спеціально обраній системі відліку ми довели, що

$$\begin{aligned} t(p_1, p_2) &= s(p_2, p_1)^*, \\ s(p_1, p_2) &= -s(p_2, p_1), \\ |s(p_1, p_2)|^2 &= 2p_1 \cdot p_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Тепер застосуємо ці результати.

- (а)** Для розминки дайте інше доведення співвідношень у (3), скориставшись (1), щоб переписати  $|s(p_1, p_2)|^2$ , як слід від діракових матриць, а потім обчисліть його.
- (б)** Покажіть, що для будь-якого добутку діракових матриць

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots] = \text{Tr} [\dots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu]$$

де  $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3, 5$ . Використайте цю тотожність для доведення, що

$$\bar{u}_L(p_1)\gamma^\mu u_L(p_2) = \bar{u}_R(p_2)\gamma^\mu u_R(p_1).$$

- (с)** Доведіть тотожність Фірца:

$$\bar{u}_L(p_1)\gamma^\mu u_L(p_2) [\gamma_\mu]_{ab} = 2[u_L(p_2)\bar{u}_L(p_1) + u_R(p_1)\bar{u}_R(p_2)]_{ab}, \tag{4}$$

де  $a, b = 1, 2, 3, 4$  є діракові індекси. Це можна зробити шляхом перевірки наступних тверджень. Права частина в (4) є діраковою матрицею, отже, її можна записати у вигляді лінійної комбінації  $\Gamma$ -матриць, які розглядалися в § 3.4. Позначимо цю матрицю  $M$ ; тоді для  $M$  виконується рівність

$$\gamma^5 M = -M \gamma^5,$$

а тому вона повинна мати вигляд

$$M = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2}\right) \gamma_\mu V^\mu + \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) \gamma_\mu W^\mu.$$

де  $V^\mu$  і  $W^\mu$  — 4-вектори. Їх можна знайти за допомогою технології слідів, наприклад:

$$V^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) M \right].$$

- (d) Розгляньте процес  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  у головному порядку за  $\alpha$ , знехтувавши масами всіх часток. Спершу проаналізуйте випадок, коли електрон і кінцевий мюон є правополяризованими, а позитрон і антимюон — лівополяризованими. (Використайте спінор  $v_R$  для антимюона і  $\bar{u}_R$  для позитрона.) Застосувавши тотожність Фірца, покажіть, що амплітуду можна вивести безпосередньо через спінорні добутки. Піднесіть її до квадрату й відтворіть результат для

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e_R^+e_L^- \rightarrow \mu_R^+\mu_L^-).$$

з рівняння (5.22). Обчисліть переріз для інших наборів спіральностей у цьому процесі й покажіть, що вони також відтворюють результати, отримані в § 5.2.

- (e) Обчисліть диференціальний переріз розсіяння Бабі з безмасовими електронами, окремо для кожного набору спіральностей. Усереднення за початковими спіральностями і сума за кінцевими мають відтворити результат Задачі 5.2. З цих викладок ви побачите, як виникає потрібний вираз для перерізу при додаванні внесків від визначених спіральностей.

#### 5.4. Час життя позитронію.

- (a) Обчисліть амплітуду  $\mathcal{M}$  для  $e^+e^-$ -анігіляції у два фотони в нерелятивістському наближенні (тобто, залиште тільки члени, пропорційні нульовим степеням 3-імпульсів електрона та позитрона). Використайте цей результат, разом з нашим формалізмом для зв'язаних станів ферміон-антиферміон, щоб розрахувати ширину розпаду  $1S$ -стану позитронію з утворенням двох фотонів. Покажіть, що стани зі спіном 1 не можуть анігілювати у два фотони, що підтверджується міркуваннями симетрії, викладеними в Задачі 3.8. Для станів позитронію зі спіном 0 покажіть, що результат пропорційний квадратів хвильової функції  $1S$ -стану в початковій точці координат. Підставивши значення хвильової функції з нерелятивістської квантової механіки, ви знайдете:

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \frac{\alpha^5 m_e}{2} \approx 8,03 \times 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Останні вимірювання<sup>25</sup> дають  $\Gamma = 7,994 \pm 0,011 \text{ нс}^{-1}$ ; для усунення розбіжності у 0,5% необхідне врахування радіаційних поправок.

<sup>25</sup>D.W. Gidley et. al., *Phys. Rev. Lett.* 49, 525 (1982).

- (b) Обчислення ширини розпаду з більшими значеннями  $l$  помітно ускладнюється. Далі в цій задачі ми обмежимося розглядом випадку, коли  $l = 1$ . Передовсім, відокреміте в амплітуді  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  члени, пропорційні першому степеню 3-імпульсу. (Для простоти оберіть систему ЦМ.) Оскільки

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} p^i \psi(\mathbf{p}) = i \frac{\partial}{\partial x^i} \psi(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0},$$

то ця частина амплітуди перекриватиметься зі зв'язаними  $P$ -станами. Покажіть, що стани з  $S = 1$ , але не з  $S = 0$ , можуть розпадатися на два фотони. Це знову є наслідком збереження  $C$ -парності.

- (c) Для обчислення ширини розпаду  $P$ -станів нам потрібні належним чином нормовані хвильові функції. Позначимо функції  $P$ -станів, як

$$\psi_i = x^i f(|\mathbf{x}|), \quad \text{нормовані умовою} \quad \int d^3\mathbf{x} \psi_i^*(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}.$$

а їхні фур'є-перетворення як  $\psi_i(\mathbf{p})$ . Покажіть, що

$$|B(\mathbf{k})\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \psi_i(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^\dagger \Sigma^i b_{-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^\dagger |0\rangle$$

є правильно нормований вектор зв'язаного стану, якщо  $\Sigma^i$  позначає набір трьох  $2 \times 2$ -матриць, для яких

$$\sum_i \text{Tr}(\Sigma^{i\dagger} \Sigma^i) = 1.$$

Для побудови станів  $S = 1$  маємо зробити так, щоб кожна  $\Sigma^i$  містила сигма-матрицю Паулі. Загалом, спін-орбітальна взаємодія розщепить мультиплет з  $S = 1, L = 1$  відповідно до повного моменту  $J$ . Для станів з визначеним  $J$  маємо

$$\begin{aligned} J = 0 : & \quad \Sigma^i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma^i, \\ J = 1 : & \quad \Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} n^j \sigma^k, \\ J = 2 : & \quad \Sigma^i = \frac{1}{\sqrt{3}} h^{ij} \sigma^j, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{n}$  є вектор поляризації, що задовольняє умові  $|\mathbf{n}|^2 = 1$ , а  $h^{ij}$  — тензор з нульовим слідом, типове значення якого має бути  $h^{12} = 1$ , коли решта компонентів нульові.

- (d) Використавши розкладення для амплітуди процесу  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ , отримане у (b), та явний вираз із (c) для станів позитронію з  $S = 1, L = 1$  і визначеним  $J$ , обчисліть для кожного  $J$  ширину розпаду на два фотони.



**5.5. Фізика масивного векторного бозона.** Введемо в КЕД масивне фотонне поле  $B_\mu$  з масою  $M$ , що взаємодіє з електроном, як

$$\Delta H = \int d^3\mathbf{x} (g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi B_\mu).$$

Масивний фотон у початковому та кінцевому станах має три можливі фізичні поляризації, що відповідають трьом простороподібним одиничним векторам у системі спокою бозона. Їх можна інваріантно описати, як три вектори  $\varepsilon_\mu^{(i)}$ , що задовольняють умовам

$$\varepsilon^{(i)} \cdot \varepsilon^{(j)} = -\delta^{ij}, \quad k \cdot \varepsilon^{(i)} = 0,$$

де  $k$  є 4-імпульсом бозона. Чотири вектори  $(k_\mu/M, \varepsilon_\mu^{(i)})$  утворюють ортогональний базис. Оскільки  $B_\mu$  пов'язане зі збереженням струму  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , то з тожності Варда випливає, що скалярний добуток  $k$  на амплітуду народження  $B$  дає нуль. Отже, ми можемо зробити заміну

$$\sum_i \varepsilon_\mu^{(i)} \varepsilon_\mu^{(i)*} \rightarrow -g_{\mu\nu}.$$

Це поширює на масивні бозони прийом Фейнмана для векторів поляризації фотона і спрощує обчислення перерізів народження  $B$ . (Увага: цей прийом не можна механічно перенести на неабелеві калібровочні поля.) Тепер проведіть вказані нижче розрахунки, щоразу нехтуючи масою електрона.

- (a)** Обчисліть переріз процесу  $e^+e^- \rightarrow B$ . Визначте час життя бозона  $B$ , виходячи з припущення, що він розпадається лише на електрони. Перевірте співвідношення

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \frac{12\pi^2}{M} \Gamma(B \rightarrow e^+e^-) \delta(M^2 - s),$$

яке розглядалося в § 5.3.

- (b)** Обчисліть диференціальний переріз процесу  $e^+e^- \rightarrow \gamma + B$  в системі ЦМ. (Ці розрахунки майже без змін переносяться на реальний процес  $e^+e^- \rightarrow \gamma + Z^0$ , що дозволяє виміряти число розпадів  $Z^0$  у неспостережні кінцеві стани, які, у свою чергу, є пропорційними до кількості різновидів нейтрино.)
- (c)** Зверніть увагу, що переріз з (b) розбігається при  $\theta \rightarrow 0$  або  $\pi$ . Проаналізуйте значення кута поблизу  $\theta = 0$ . У цьому проміжку переважний внесок дає  $t$ -канальна діаграма. Інтуїтивно це відповідає випромінюванню фотона з електронної лінії до анігіляції  $e^+e^-$  в  $B$ . Перекомпонуйте формулу так, щоб підтвердити цю інтерпретацію. Передовсім

зауважте, що розбіжність при  $\theta \rightarrow 0$  обрізується електронною масою: нехай імпульс електрона  $\epsilon (E, 0, 0, k)$ , де  $k = \sqrt{E^2 - m_e^2}$ , а імпульс фотона  $k^\mu = (xE, xE \sin \theta, 0, xE \cos \theta)$ . Покажіть, що знаменник пропагатора ніколи не стає меншим за  $\mathcal{O}(m_e^2/s)$ . Тепер проінтегруйте переріз з пункту (b) по кутах, обрізавши інтеграл при  $\theta^2 \sim (m_e^2/s)$  і залишивши тільки основний логарифмічний член, пропорційний  $\log(s/m_e^2)$ . Покажіть, що в цьому наближенні переріз для випромінювання фотона вперед можна записати як

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) \approx \int dx f(x) \cdot \sigma(e^+e^- \rightarrow B \text{ при } E_{\text{цм}}^2 = (1-x)s),$$

де переріз анігіляції обчислено для зіткнення позитрона з енергією  $E$  та електрона з енергією  $(1-x)E$ , а  $f(x)$ , *функція розподілу Вайцзекера–Вільямса*, є

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 + (1-x)^2}{x} \cdot \log\left(\frac{s}{m_e^2}\right).$$

Ця функція неодмінно виникає в тих процесах, де фотон випромінюється колінеарно з електронної лінії. Ми знову зустрінемо її, уже в іншому контексті, в Задачі 6.2.

**5.6.** Ця задача поширює технологію спінових добутків з Задачі 5.3 на зовнішні фотони.

**(a)** Нехай  $k$  є імпульс фотона, а  $p$  — інший світлоподібний вектор, обраний так, щоб  $p \cdot k \neq 0$ . Нехай  $u_R(p)$  і  $u_L(p)$  будуть спінорами з певною спіральністю для ферміонів зі світлоподібним імпульсом  $p$ , визначені відповідно до домовленостей у Задачі 5.3. Визначимо вектори поляризації фотона:

$$\varepsilon_+^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{4p \cdot k}} \bar{u}_R(k) \gamma^\mu u_R(p), \quad \varepsilon_-^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{4p \cdot k}} \bar{u}_L(k) \gamma^\mu u_L(p).$$

Застосуємо тотожність

$$u_L(p) \bar{u}_L(p) + u_R(p) \bar{u}_R(p) = \not{p}$$

для обчислення суми за поляризаціями

$$\varepsilon_+^\mu \varepsilon_+^{\nu*} + \varepsilon_-^\mu \varepsilon_-^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu}{p \cdot k}.$$

Другий доданок у правій частині дасть нуль, якщо його згорнути з будь-якою амплітудою  $\mathcal{M}^\mu$  випромінювання фотона, відтак маємо

$$|\varepsilon_+ \cdot \mathcal{M}|^2 + |\varepsilon_- \cdot \mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*} (-g_{\mu\nu});$$

отже, ми можемо використовувати вектори  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  для обчислення сум за поляризаціями фотонів.

- (b)** Використовуючи визначені вище поляризації, спінові добутки і тотожність Фірца з Задачі 5.3, обчисліть диференціальний переріз анігіляції безмасових електрона та позитрона у два фотони. Покажіть, що цей результат узгоджується з безмасовим наближенням, отриманим у (5.107):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right)$$

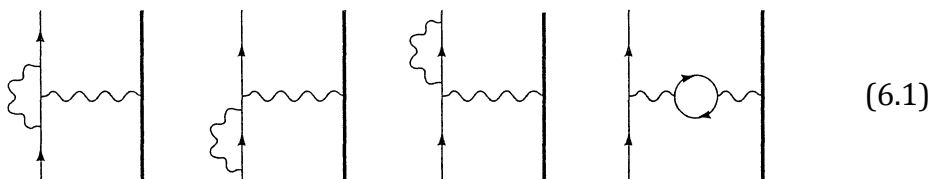
для системи ЦМ. З результату пункту (a) випливає, що відповідь не залежить від конкретного вектора  $p$ , який використовувався для визначення поляризаційних векторів; проте обчислення значно спрощується, коли вибрати за цей вектор початковий 4-імпульс електрона.

## Розділ 6

### Радіаційні поправки: вступ

Тепер, коли ми набули певного досвіду проведення обчислень КЕД, перейдімо до дещо складніших задач. У Розділі 5 ми мали справу лише з *дерезовидними* діаграмами, тобто з такими, що не містили петель. Проте всі розглянуті нами процеси у вищих порядках отримують внески, відомі як *радіаційні поправки* від діаграм з петлями. Іншим джерелом радіаційних поправок у КЕД є *гальмівне випромінювання* — поява в кінцевому стані додаткових фотонів, утворених під час реакції. У цьому розділі ми вивчимо обидва типи радіаційних поправок і виявимо, що неправомірно враховувати одні без урахування інших.

Упродовж усього розділу, для ілюстрації цих ідей у найпростішому контексті, ми розглядатимемо розсіяння електрона на іншій, дуже важкій частці. У деревовидному наближенні ми вже аналізували цей процес у § 5.4 і в Задачі 5.1. У наступному порядку теорії збурень внесок у нього дають такі діаграми:



Поправка першого порядку за  $\alpha$  виникає від інтерференції між внесками від цих і деревовидних діаграм. Існує ще шість додаткових однопетельних діаграм з важкою часткою в петлі, проте ними можна знехтувати, якщо друга частка набагато важча за електрон, бо тоді у знаменнику пропагатора з'являється доданок з великою масою. (Фізично це можна пояснити так, що важча частка у процесі зіткнення зазнає меншого прискорення, а отже, менше випромінює.)

З чотирьох діаграм у (6.1), перша (відома як *вершинна поправка*) є найскладнішою і призводить до найбільшої кількості нових ефектів. Наприклад, саме вона викликає аномальний магнітний момент електрона, який ми обчислимо в § 6.3.

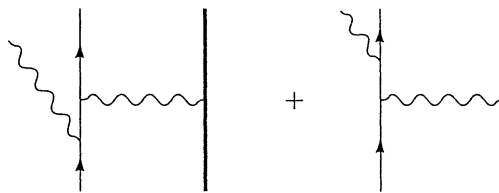
Наступні дві діаграми є *поправками до зовнішніх ліній*. Ми знехтуємо ними в поточному розділі, оскільки ці діаграми не ампутовані, як вимагає

формула (4.90) для елементів  $S$ -матриці. Ми детально розглянемо ці діаграми після того, як доведемо згадану формулу в § 7.2.

Остання діаграма в (6.1) називається *поляризацією вакууму*. Оскільки вона потребує значно складнішої обчислювальної техніки, ніж решта діаграм, ми не розглядатимемо її до § 7.5.

Наше вивчення радіаційних поправок ускладнюватиметься ще й тією обставиною, що вони є погано визначеними. Кожна така діаграма передбачає інтегрування по імпульсу в петлі, і щоразу цей інтеграл розбігається при  $k \rightarrow \infty$ , в *ультрафіолетовій зоні*. На щастя, нескінченні частини цих інтегралів завжди скорочуються при обчисленні спостережних величин, на зразок перерізу розсіяння.

Перші три діаграми у (6.1) також містять й *інфрачервоні розбіжності* — нескінченності, що виникають на межі  $k \rightarrow 0$  інтегрування по імпульсу в петлі. У § 6.4 ми побачимо, що ці розбіжності скорочуються при врахуванні діаграм *гальмівного випромінювання*:


(6.2)

Ці діаграми є розбіжними в межі, коли енергія випроміненого фотона прагне до нуля. У цій межі жоден фізичний детектор не спроможний виявити фотони з такою низькою енергією, проте ми мусимо їх враховувати в загальному перерізі розсіяння. Діаграми гальмівного випромінювання є істотною частиною радіаційних поправок як для цього, так і для решти процесів КЕД.

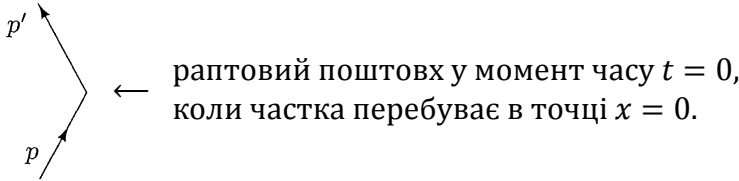
Головна наша мета в цьому розділі полягає у вивченні гальмівного випромінювання низькоенергетичних фотонів, діаграм вершинних поправок та скорочення інфрачервоних розбіжностей між ними.

## § 6.1. М'яке гальмівне випромінювання

Почнемо вивчення радіаційних поправок з аналізу гальмівного випромінювання. У цьому параграфі ми спершу проведемо класичне обчислення низькочастотного випромінювання в разі раптового прискорення електрона. Потім розрахуємо споріднену величину з квантової теорії поля — переріз утворення дуже м'яких фотонів за діаграмами (6.2). Також ми побачимо, що класичний результат виникає як граничний випадок квантового.

### Класичне обчислення

Припустімо, що класичний електрон, перебуваючи в точці  $\mathbf{x} = 0$ , зазнає в момент часу  $t = 0$  раптового поштовху, що призводить до зміни його імпульсу від  $p$  до  $p'$ . (Певна річ, миттєва зміна імпульсу є нереальною ідеалізацією. Проте точна форма траєкторії в процесі прискорення не впливає на низькочастотне випромінювання. Тому наші обчислення будуть справедливими для частот, менших від зворотної величини часу розсіяння.)



Поле випромінювання можемо знайти, записавши вираз для струму електрона, як джерела в рівняннях Максвелла.

Яке значення має питомий струм у цьому випадку? Для зарядженої частки, що перебуває в стані спокою при  $\mathbf{x} = 0$ , струм є

$$j^\mu(x) = (1, \mathbf{0})^\mu \cdot e \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \int dt (1, \mathbf{0})^\mu \cdot e \delta^{(4)}(x - y(t)) \quad \text{де} \quad y^\mu(t) = (t, \mathbf{0})^\mu.$$

А для довільної траєкторії  $y^\mu(\tau)$ ,

$$j^\mu(x) = e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(t)). \quad (6.3)$$

Зазначимо, що цей вираз не залежить від точного способу параметризації траєкторії, оскільки заміна  $\tau$  на  $\gamma(\tau)$  дає в мірі інтегрування додатковий фактор  $d\tau/d\sigma$ , який при перемноженні на  $dy^\mu/d\tau$  перетворюється на  $dy^\mu/d\sigma$ . З виразу (6.3) ми можемо довести, що такий струм тотожно зберігається, оскільки для будь-якої функції  $f(x)$ , що обертається на нуль на нескінченності,

$$\begin{aligned} \int d^4x f(x) \partial_\mu j^\mu(x) &= \int d^4x f(x) e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \partial_\mu \delta^{(4)}(x - y(t)) = \\ &= -e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x) \Big|_{x=y(t)} = \\ &= -e \int d\tau \frac{d}{d\tau} f(y(\tau)) = \\ &= -e f(y(\tau)) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Для нашого процесу траєкторія має вигляд

$$y^\mu(\tau) = \begin{cases} (p^\mu/m)\tau & \text{для } \tau < 0; \\ (p'^\mu/m)\tau & \text{для } \tau > 0. \end{cases}$$

Тому струм можна переписати, як

$$j^\mu(x) = e \int_0^\infty d\tau \frac{p'^\mu}{m} \delta^{(4)}\left(x - \frac{p'}{m}\right) + e \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{p^\mu}{m} \delta^{(4)}\left(x - \frac{p}{m}\right).$$

Наразі нам знадобиться фур'є-перетворення цієї функції. Вставивши множники  $e^{-\varepsilon\tau}$  та  $e^{\varepsilon\tau}$ , щоб усунути розбіжності в інтегралах, маємо

$$\begin{aligned} \tilde{j}^\mu &= \int d^4x e^{ik \cdot x} j^\mu(x) = \\ &= e \int_0^\infty d\tau \left(\frac{p'^\mu}{m}\right) e^{i\left(\frac{k \cdot p'}{m} + i\varepsilon\right)\tau} + e \int_{-\infty}^0 d\tau \left(\frac{p^\mu}{m}\right) e^{i\left(\frac{k \cdot p}{m} - i\varepsilon\right)\tau} = \\ &= ie \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p' + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{k \cdot p - i\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

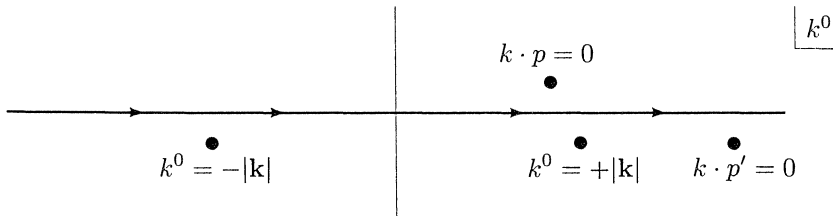
Тепер ми готові до розв'язання рівняння Максвелла. В лоренцовій калібровці  $\partial^\mu A_\mu = 0$  треба розв'язати  $\partial^2 A^\mu = j^\mu$ , або, у фур'є-просторі,

$$\tilde{A}^\mu(k) = -\frac{1}{k^2} \tilde{j}^\mu(k).$$

Підставивши  $\tilde{j}^\mu$  з (6.4), отримуємо формулу для векторного потенціалу:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{-ie}{k^2} \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p' + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{k \cdot p - i\varepsilon} \right). \quad (6.5)$$

Інтеграл по  $k^0$  можемо обчислити, як контурний інтеграл у комплексній площині. Полюси знаходяться в точках:



Ми пересунули полюси  $k^0 = \pm|k|$  нижче дійсної осі для того (незабаром ми підтвердимо цей висновок), щоб поле випромінювання задовольняло запізнювальним граничним умовам.

Для  $t < 0$  замкнемо контур у верхній півплощині, охопивши полюс  $k \cdot p = 0$ , тобто,  $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/p^0$ . В результаті,

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}/p^0)t} \frac{(2\pi i)(+i\varepsilon)}{(2\pi)k^2} \frac{p^\mu}{p^0}.$$

У системі відліку, де електрон початково перебуває в стані спокою, його імпульс є  $p^\mu = (p^0, \mathbf{0})$ , а векторний потенціал переходить у

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{e}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (1, \mathbf{0})^\mu.$$

Це є кулонів потенціал не прискореного заряду. Як і слід очікувати, випромінювання відсутнє, поки електрон не зазнає розсіяння.

Після розсіяння ( $t > 0$ ) замкнемо контур знизу, охопивши три полюси, розташовані нижче дійсної осі. Полюс при  $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}'/p'^0$  призводить до кулонового потенціалу вихідної частки. Отже, інші два полюси відповідальні за поле випромінювання. Їхній внесок дає

$$\begin{aligned} A_{\text{rad}}^\mu(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{-e}{2|\mathbf{k}|} \left\{ e^{-ik\cdot x} \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) + \text{к. с.} \right\} \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} = \\ &= \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

де амплітуда в імпульсному просторі  $\mathcal{A}(\mathbf{k})$  є

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) = -\frac{e}{|\mathbf{k}|} \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right). \quad (6.7)$$

(Тут і далі неявно припускається виконання умови  $k^0 = |\mathbf{k}|$ .)

Для обчислення енергії випромінювання маємо знайти електричне та магнітне поля. Найпростіше записати  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B}$  через дійсні складові комплексних інтегралів Фур'є, як ми це вчинили для  $A^\mu$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x}; \\ \mathbf{B}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{B}(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В імпульсному просторі амплітуди  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  і  $\mathcal{B}(\mathbf{k})$  випромінюваних полів є просто

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{k}) &= -ik\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + ik^0\mathcal{A}(\mathbf{k}), \\ \mathcal{B}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k} \times \mathcal{A}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \mathcal{E}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (6.9)$$



Використавши явний вигляд (6.7) для  $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k})$ , легко переконатися, що електричне поле є поперечним:  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) = 0$ .

Маючи вирази для полів, можемо знайти енергію випромінювання:

$$\text{Енергія} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (|\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 + |\mathbf{B}(\mathbf{x})|^2). \quad (6.10)$$

Перший член є

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right) \times \\ & \quad \times \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot x} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x} \right) = \\ & = \frac{1}{8} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{k}) e^{-2ik^0 t} + 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{k}) e^{2ik^0 t} \right). \end{aligned}$$

Такий самий вираз, що містить  $\mathcal{B}(\mathbf{k})$ , дає другий член. Використовуючи (6.9) і той факт, що  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})$  є поперечним, ми можемо показати, що залежні від часу доданки з  $\boldsymbol{\varepsilon}$  і  $\mathcal{B}$  скорочуються, а решта в підсумку дають

$$\text{Енергія} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{k}). \quad (6.11)$$

Оскільки вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})$  поперечний, введемо два поперечні одиничні поляризаційні вектори  $\varepsilon_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Тоді підінтегральний вираз можемо переписати, як

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{k}) &= \sum_{\lambda=1,2} |\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})|^2 = \\ &= |\mathbf{k}|^2 \sum_{\lambda=1,2} |\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{k})|^2. \end{aligned}$$

Скориставшись явним виглядом (6.7) для  $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ , маємо остаточний вираз для енергії випромінювання:<sup>26</sup>

$$\text{Енергія} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \frac{e^2}{2} \left| \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\mathbf{p}'}{k \cdot p'} - \frac{\mathbf{p}}{k \cdot p} \right) \right|^2. \quad (6.12)$$

Тут ми можемо вільно замінити вектори  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{p}'$ , і  $\mathbf{p}$  на 4-вектори. Зауваживши, що заміна  $\varepsilon^\mu$  на  $k^\mu$  має давати нуль,

$$k_\mu \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) = 0,$$

<sup>26</sup>Цей результат отримано у [32], стор. 703.

знаходимо, що суму за поляризаціями можна обчислити, вдавшись до прийому з § 5.5, тобто замінивши  $\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu^*$  на  $-g_{\mu\nu}$ . В результаті,

$$\begin{aligned} \text{Енергія} &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2} (-g_{\mu\nu}) \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) \left( \frac{p'^\nu}{k \cdot p'} - \frac{p^\nu}{k \cdot p} \right) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2} \left( \frac{2p \cdot p'}{(k \cdot p')(k \cdot p)} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Щоб зробити цю формулу нагляднішою, оберемо систему відліку, в якій  $p^0 = p'^0 = E$ . Тоді імпульси є

$$k^\mu = (k, \mathbf{k}), \quad p^\mu = E(1, \mathbf{v}), \quad p'^\mu = E(1, \mathbf{v}').$$

У такій системі наша формула набуває вигляду

$$\text{Енергія} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int dk \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'), \quad (6.14)$$

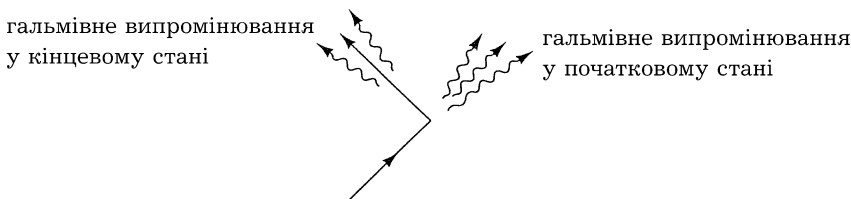
де  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  — диференційна інтенсивність  $d(\text{Енергія})/dk$ :

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}}{4\pi} \left( \frac{2(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}')} - \frac{m^2/E^2}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})^2} - \frac{m^2/E^2}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}')^2} \right). \quad (6.15)$$

Оскільки  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  не залежить від  $k$ , ми бачимо, що інтеграл у (6.14) по  $k$  є тривіальним, але розбіжним. Ця розбіжність насправді виникає через використану нами ідеалізацію з миттєвою зміною імпульсу. Ми очікуємо, що наша формула буде працювати лише для випромінювання з частотами, меншими від зворотної величини часу розсіювання. З релятивістським електроном має місце ще одне обмеження, яке виникає за рахунок ефекту, коли окремі фотони відбирають істотну частину його енергії. В обох випадках формула справедлива в межах малих частот, тому ми можемо обрізати інтеграл на певному значенні максимальної частоти  $k_{\max}$ . У цьому разі,

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{\alpha}{\pi} \cdot k_{\max} \cdot \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (6.16)$$

Підінтегральний вираз  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  є великим, коли  $\hat{\mathbf{k}}$  паралельний  $\mathbf{v}$  або  $\mathbf{v}'$ :



В ультрарелятивістському наближенні основний внесок в енергію дають два максимуми в першому члені виразу (6.15). Обчислимо  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  в цьому наближенні, обмежившись інтервалами поблизу двох згаданих максимумів:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \approx & \int_{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{(1 - v \cos \theta)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')} + \\ & + \int_{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{(1 - v' \cos \theta)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')} \end{aligned}$$

(Нижні межі в інтегралах насправді неістотні, бо можна вибрати  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = 1 - \chi(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')$  таким чином, щоб  $\chi$  не був надто близьким до 0 і не набагато більшим від 1. Легко показати, що провідний внесок в ультрарелятивістському наближенні не залежить від  $\chi$ .) Проінтегрувавши, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') & \approx \log \left( \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{1 - |\mathbf{v}|} \right) + \log \left( \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{1 - |\mathbf{v}'|} \right) = \\ & = \log \left( \frac{(E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')^2}{E^2(E - |\mathbf{p}|)^2} \right) = \\ & \approx 2 \log \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{(E^2 - |\mathbf{p}|^2)/2} \right) = 2 \log \left( \frac{-q^2}{m^2} \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

де  $q^2 = (p' - p)^2$ .

Отже, ми встановили, що енергія, випромінена при низьких частотах,

$$\text{Енергія} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\max}} dk \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \xrightarrow{E \gg m} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\max}} dk \log \left( \frac{-q^2}{m^2} \right). \quad (6.18)$$

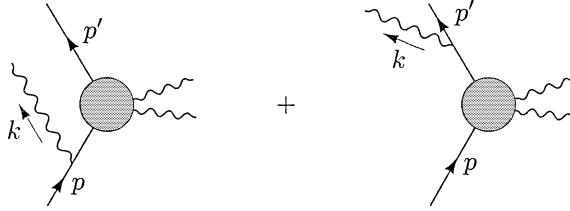
Якщо випромінювання складається з фотонів, то кожен з них переносить енергію  $k$ . Тоді ми можемо знайти їхню кількість:

$$\text{Число фотонів} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (6.19)$$

Маємо сподівання, що обчислення в рамках квантової механіки підтвердять цей результат.

### Квантовомеханічне обчислення

Тепер розглянемо квантовомеханічний процес, що полягає у випромінюванні одного фотона в процесі розсіяння електрона:



Нехай  $\mathcal{M}_0$  позначає частину амплітуди, що виникає від взаємодії електрона з зовнішнім полем. Амплітуда процесу загалом є така:

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p') \left( \mathcal{M}_0(p', p - k) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k) + \right. \\ \left. + \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k) \frac{i(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p' + k)^2 - m^2} \mathcal{M}_0(p' + k, p) \right) u(p). \quad (6.20)$$

Оскільки нас цікавить зв'язок з класичним наближенням, припустимо, що випромінюється м'який фотон з  $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$ . Тоді ми можемо наближено записати

$$\mathcal{M}_0(p', p - k) \approx \mathcal{M}_0(p' + k, p) \approx \mathcal{M}_0(p', p), \quad (6.21)$$

де можемо знехтувати  $k$  в чисельниках пропагаторів. Ці чисельники можна ще більше спростити, застосувавши алгебру діракових матриць. У першому доданку,

$$(\not{p} + m) \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* u(p) = [2p^\mu \varepsilon_\mu^* (-\not{p} + m)] u(p) = \\ = 2p^\mu \varepsilon_\mu^* u(p).$$

Так само в другому,

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* (\not{p}' + m) = \bar{u}(p') 2p'^\mu \varepsilon_\mu^*.$$

Знаменники пропагаторів також спрощуються:

$$(p - k)^2 - m^2 = -2p \cdot k; \\ (p' + k)^2 - m^2 = -2p' \cdot k.$$

Отже, в наближенні, коли випромінюється м'який фотон, амплітуда набуває вигляду

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p') [\mathcal{M}_0(p', p)] u(p) \cdot \left[ e \left( \frac{p' \cdot \varepsilon^*}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon^*}{p \cdot k} \right) \right]. \quad (6.22)$$

Вона просто дорівнює амплітуді пружного розсіяння (без гальмівного випромінювання), помноженій на вираз у квадратних дужках, що дає поправку на утворення м'якого фотона.

Так само й переріз процесу ми можемо легко виразити через переріз пружного розсіяння, для чого треба просто додатково провести фазово-просторове інтегрування по фотонному імпульсу  $k$ . Підсумувавши за двома станами поляризації фотона, маємо

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2. \quad (6.23)$$

Отже, диференційна ймовірність того, що електрон, розсіяний зі зміною імпульсу від  $p$  до  $p'$ , випромінить фотон з імпульсом  $k$ , є

$$d(\text{імовірність}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \frac{e^2}{2k} \left| \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}'}{p' \cdot k} - \frac{\mathbf{p}}{p \cdot k} \right) \right|^2. \quad (6.24)$$

Цей вираз має дуже знайомий вигляд. Помноживши його на енергію фотона  $k$ , щоб отримати випромінену енергію, ми повертаємося до класичного виразу (6.12).

Проте є одна проблема. Рівняння (6.24) визначає не кількість випромінених фотонів, а лише ймовірність випромінювання одного фотона. Ситуація ще погіршиться, якщо ми проінтегруємо по фотонному імпульсу. Як і в (6.16), ми можемо інтегрувати лише до того значення енергії, на якому наше наближення м'яких фотонів перестає працювати. Розумною оцінкою обрізання є  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$ , і тоді

$$\text{Повна імовірність} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\mathbf{q}|} dk \frac{1}{k} \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (6.25)$$

Оскільки  $\mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  не залежить від  $k$ , то інтеграл розбігається на нижній межі (де всі наші наближення добре справджувались). Інакше кажучи, повна ймовірність випромінювання дуже м'якого фотона є нескінченною. У цьому й полягає відома проблема інфрачервоної розбіжності в теорії збурень КЕД.

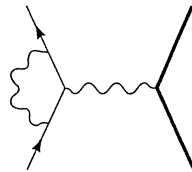
Ми можемо штучно зробити інтеграл у (6.25) добре визначеним, припустивши, що фотон має малу ненульову масу  $\mu$ . Ця маса визначає обрізання інтеграла на нижній межі, що в підсумку дає

$$\begin{aligned} d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma(k)) &= d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \mathcal{J}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \Big|_{-q^2 \rightarrow \infty} \approx \\ &\approx_{-q^2 \rightarrow \infty} d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Залежність результату від  $q^2$ , відома як *судаківський подвійний логарифм*, насправді має фізичний сенс і знову виникне в § 6.4. Проте залежність від  $\mu$  є проблемою, якій ми мусимо дати раду. Неважко здогадатися, що вирішення цієї проблеми полягатиме у впровадженні нової інтерпретації формули (6.24), як очікуваної кількості випромінених фотонів, а не ймовірності випромінювання одного фотона. В §§ 6.4 і 6.5 ми побачимо, як ця нова інтерпретація впливає з розгляду фейнманових діаграм. Проте, щоб підготуватися до цього обговорення, ми маємо поглибити розуміння амплітуди розсіяння без випромінювання.

## § 6.2. Електронна вершинна функція: формальна структура

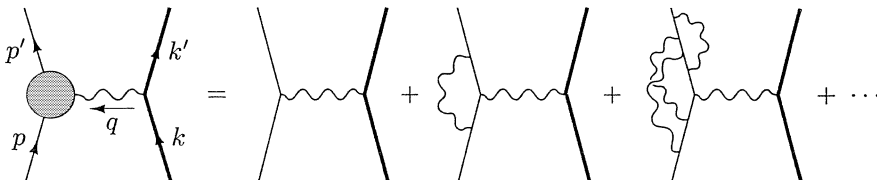
Після короткого розгляду радіаційних поправок КЕД, що виникають від гальмівного випромінювання, перейдемо до поправок, викликаних присутністю додаткового *віртуального* фотона:



Це стане нашим першим досвідом роботи з фейнмановими діаграмами, що містять петлі. Такі діаграми породжують у квантовій теорії поля надзвичайно серйозні ускладнення.

Результат обчислення цієї діаграми має бути досить громіздким, тому корисно заздалегідь спробувати зрозуміти, на який вигляд поправки слід очікувати і як інтерпретувати її можливі складові. В поточному параграфі ми розглянемо загальні властивості діаграм вершинних поправок і побачимо, що засадничі вимоги лоренц-інваріантності, дискретних симетрій у КЕД і тотожності Варда жорстко обмежують припустиму форму вершини.

Отже, розглянемо клас діаграм:



де сірим колом позначено суму електрон-фотонних вершин у нижчому порядку з усіма ампутуваними петльовими поправками. Надалі позначатимемо цю суму вершинних діаграм, як  $-ie \Gamma^\mu(p', p)$ . Відповідно до основної

формули (4.103) для елементів  $S$ -матриці, амплітуда розсіяння електрона на важкій мішені є

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left( \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \right) \frac{1}{q^2} \left( \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \right). \quad (6.28)$$

У загальнішому випадку, функція  $\Gamma^\mu(p', p)$  виникає в елементі  $S$ -матриці розсіяння електрона у зовнішньому електромагнітному полі. Як і в Задачі 4.4, додамо до гамільтоніана КЕД член із взаємодією

$$\Delta H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} e A_\mu^{\text{cl}} j^\mu, \quad (6.29)$$

де  $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$  є електромагнітний струм, а  $A_\mu^{\text{cl}}$  — фіксований вектор-потенціал класичного зовнішнього поля. У провідному порядку теорії збурень матричний елемент розсіяння електрона на такому зовнішньому полі є

$$i\mathcal{M} (2\pi) \delta(p'^0 - p^0) = -ie \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(p' - p),$$

де  $\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q)$  — фур'є-перетворення  $A_\mu^{\text{cl}}(x)$ . Вершинні поправки змінюють цей вираз на

$$i\mathcal{M} (2\pi) \delta(p'^0 - p^0) = -ie \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(p' - p), \quad (6.30)$$

У (6.28) і (6.30) ми свідомо вилучили внески від діаграм поляризації вакууму, на зразок четвертої діаграми в (6.1). Причина полягає в тому, що такі діаграми описують квантові поправки до самого електромагнітного поля, тоді як діаграми в  $\Gamma^\mu$  є поправками до відгуку електрона на задане наведене поле.<sup>27</sup>

Ми можемо вдатися до загальних міркувань, щоб накласти обмеження на вигляд  $\Gamma^\mu(p', p)$ . Очевидно, що в нижчому порядку  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ . Власне кажучи,  $\Gamma^\mu$  є певним виразом, що містить  $p$ ,  $p'$ ,  $\gamma^\mu$ , різні константи (на зразок  $m$  і  $e$ ) та числові коефіцієнти. Це є вичерпним списком, бо жодні інші величини не входять до фейнманових правил для обчислення діаграм у  $\Gamma^\mu$ . Єдино ще міг би ще з'явитися тензор  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  (або, що еквівалентно,  $\gamma^5$ ), проте його присутність неприпустима в будь-якій теорії, де зберігається парність.

Ми можемо ще більше звузити можливий вибір форм для  $\Gamma^\mu$ , звернувшись до лоренц-інваріантності. Оскільки  $\Gamma^\mu$  перетворюється, як 4-вектор (у тому ж сенсі, що й  $\gamma^\mu$ ), то вона має бути певною лінійною комбінацією векторів з наведеного вище переліку —  $\gamma^\mu$ ,  $p^\mu$  і  $p'^\mu$ . Скориставшись для зручності комбінаціями  $p' + p$  і  $p' - p$ , маємо

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C. \quad (6.31)$$

<sup>27</sup> Для обґрунтування цього твердження ми мусимо строго визначити, що є наведеним зовнішнім полем у квантовій теорії. Це буде зроблено в Розділі 11.

Коефіцієнти  $A$ ,  $B$  і  $C$  можуть містити діракові матриці, згорнуті з векторами на зразок  $\not{p}$  та  $\not{p}'$ , але оскільки  $\not{p} u(p) = t \cdot u(p)$  і  $\bar{u}(p') \not{p}' = \bar{u}(p') \cdot t$ , то ми можемо без втрати загальності записати ці коефіцієнти як звичайні числа. Єдиним нетривіальним скаляром є  $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$ , тож  $A$ ,  $B$  і  $C$  мають бути функціями лише від  $q^2$  (та констант на зразок  $t$  і  $e$ ).

Перелік допустимих векторів ще скоротиться, якщо застосувати тотожність Варда (5.79):  $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ . (Відзначимо, що наші аргументи на користь цієї тотожності в § 5.5 — і доведення в § 7.4 — не вимагають  $q^2 = 0$ .) Згорнувши  $q_\mu$  з (6.31) за лоренцовими індексами і розмістивши між  $\bar{u}(p')$  та  $u(p)$ , ми можемо переконатися, що перший та другий доданки обертаються на нуль, а третій ні, тому  $C = 0$ .

Далі спрощувати (6.31) на підставі лише загальних принципів ми вже не можемо. Проте зручно переписати цей вираз за допомогою тотожності Ґордона (Задача 3.2):

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p). \quad (6.32)$$

Ць дозволяє нам замінити член з  $(p' + p)$  на такий, що містить  $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ . Остаточно запишемо результат, як

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (6.33)$$

де  $F_1$  і  $F_2$  є невідомими функціями від  $q^2$ , що мають назву *форм-факторів*.

У найнижчому порядку теорії збурень  $F_1 = 1$  і  $F_2 = 0$ . В наступному параграфі ми обчислимо для них однопетльові (порядку  $\alpha$ ) поправки за рахунок вершинної діаграми (6.27). Загалом, форм-фактори можна знайти для будь-якого порядку теорії збурень.

Позаяк  $F_1$  і  $F_2$  містять усю інформацію про вплив електромагнітного поля на електрон, вони мають, зокрема, включати електричний заряд електрона та його магнітний момент. Для знаходження електричного заряду скористаємося (6.30) й обчислимо амплітуду пружного кулонового розсіяння нерелятивістського електрона на ділянці простору з ненульовим електростатичним потенціалом. Нехай  $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{0})$ . Тоді  $\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q^2) = ((2\pi)\delta(q^0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}), \mathbf{0})$ . Підставивши цей вираз у (6.30), маємо

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p') \Gamma^0(p', p) u(p) \cdot \tilde{\phi}(\mathbf{q}).$$

Якщо електростатичне поле дуже повільно змінюється на великій (можливо, макроскопічній) ділянці простору, то  $\tilde{\phi}(\mathbf{q})$  буде зосереджена поблизу  $\mathbf{q} = 0$ , а отже, ми можемо перейти до межі  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  у спірному матричному



елементі. Внесок дає лише форм-фактор  $F_1$ . Скориставшись виразом для спинорів у нерелятивістському наближенні,

$$\bar{u}(p') \gamma^0 u(p) = u^\dagger(p') u(p) \approx 2m \xi'^\dagger \xi,$$

отримуємо амплітуду розсіяння електрона на електростатичному полі:

$$i\mathcal{M} = -ieF_1(0)\tilde{\Phi}(\mathbf{q}) \cdot 2m \xi'^\dagger \xi. \quad (6.34)$$

Це є борнове наближення для розсіяння на потенціалі

$$v(\mathbf{x}) = eF_1(0)\phi(\mathbf{x}).$$

Таким чином,  $F_1(0)$  є електричним зарядом електрона в одиницях  $e$ . Оскільки  $F_1(0) = 1$  вже в головному порядку теорії збурень, радіаційні поправки до  $F_1(q^2)$  мають обертатися на нуль при  $q^2 = 0$ .

Повторивши ці міркування для розсіяння електрона на статичному векторному потенціалі, можемо виявити схожий зв'язок між форм-факторами та магнітним моментом електрона.<sup>28</sup> Встановимо  $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (0, \mathbf{A}^{\text{cl}})$ . Амплітуда розсіяння на цьому полі є

$$i\mathcal{M} = +ie \left[ \bar{u}(p') \left( \gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2 \right) u(p) \right] \tilde{A}_{\text{cl}}^i(\mathbf{q}). \quad (6.35)$$

Вираз у квадратних дужках обертається на нуль при  $\mathbf{q} = 0$ , тому ми мусимо акуратно виокремити з нього внесок, лінійний за  $q^i$ . Для цього розкладемо  $u(p)$  в нерелятивістському наближенні й залишимо тільки лінійні за імпульсами члени:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \sigma / 2m) \xi \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \sigma / 2m) \xi \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Доданок з  $F_1$  можна спростити наступним чином:

$$\bar{u}(p') \gamma^i u(p) = 2m \xi'^\dagger \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \sigma}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\mathbf{p} \cdot \sigma}{2m} \right) \xi.$$

Застосувавши тотожність  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$ , знаходимо два члени — незалежний від спіну (пропорційний  $(\mathbf{p}' + \mathbf{p})$ ) і залежний від нього (пропорційний  $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ ). Перший з них є внеском від оператора  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  в звичайну кінетичну енергію нерелятивістської квантової механіки. Другий представляє взаємодію з полем магнітного моменту — що ми й шукали. Відкинувши перший член, маємо

$$\bar{u}(p') \gamma^i u(p) = 2m \xi'^\dagger \left( \frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi.$$

<sup>28</sup> Подальші викладки містять багато множників  $(-1)$ , що виникають від підняття й опускання простороподібних індексів. Перевіряючи обчислення, будьте пильні!

Доданок з  $F_2$  вже містить у явному вигляді множник  $q$ , тому ми можемо обчислити його, використавши головний член розкладення спінорів:

$$\bar{u}(p') \left( \frac{i}{2m} \sigma^{iv} q_v \right) u(p) = 2m \xi'^{\dagger} \left( \frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi.$$

Звідси повний член електрон-фотонної функції, пропорційний  $q$ , є

$$\bar{u}(p') \left( \gamma^i F_1 + \frac{i \sigma^{iv} q_v}{2m} F_2 \right) u(p) \underset{q \rightarrow 0}{\approx} 2m \xi'^{\dagger} \left( \frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^j \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi.$$

Підставивши цей вираз у (6.35), знаходимо

$$i\mathcal{M} = -i(2m) \cdot e \xi'^{\dagger} \left( \frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \tilde{B}^k(\mathbf{q}),$$

де

$$\tilde{B}^k(\mathbf{q}) = -i \varepsilon^{ijk} q^i \tilde{A}_{\text{cl}}^j(\mathbf{q})$$

є фур'є-перетворенням магнітного поля, породженого  $\mathbf{A}^{\text{cl}}(\mathbf{x})$ .

Ми знову можемо інтерпретувати  $\mathcal{M}$  як борнове наближення амплітуди розсіяння електрона на деякому потенціалі. Цей потенціал відповідає взаємодії магнітного моменту,

$$V(\mathbf{x}) = -\langle \mu \rangle \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

де

$$\langle \mu \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi'^{\dagger} \frac{\sigma}{2} \xi.$$

Цей вираз для магнітного моменту електрона можемо переписати в стандартній формі:

$$\mu = g \left( \frac{e}{2m} \right) \mathbf{S},$$

де  $\mathbf{S}$  — спін електрона. Коефіцієнт  $g$  має назву *фактора Ланде*:

$$g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \quad (6.37)$$

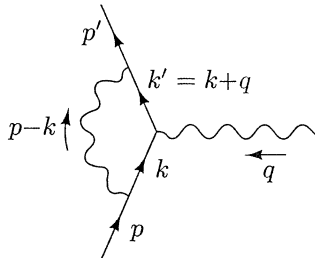
Оскільки в головному порядку теорії збурень член  $s F_2$  не з'являється, КЕД стверджує, що  $g = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$ . Провідний член у  $g$ -факторі є стандартним наслідком рівняння Дірака. Проте у вищих порядках ми виявимо ненульовий  $F_2$ , і тоді виникне невелика розбіжність між магнітним моментом електрона і діраковим значенням для нього. В наступному параграфі ми обчислимо в першому порядку за  $\alpha$  внесок до цього *аномального магнітного моменту*.

Оскільки наші викладки для структури вершини (6.33) ґрунтувалися лише на загальних принципах симетрії, є всі підстави сподіватися, що ця формула справедлива для взаємодії з електромагнітним полем не лише

електрона, а й будь-якого ферміона. До прикладу, електромагнітна амплітуда розсіяння протона на фотоні так само має описуватися двома інваріантними функціями від  $q^2$ . Та оскільки протон не є елементарною часткою, не варто очікувати, що діракові значення  $F_0 = 1$  і  $F_2 = 0$  будуть вдалими наближеними значеннями для форм-факторів протона. Насправді обидва форм-фактори протона дуже залежать від  $q^2$ . Проте розгляд вершинної функції за допомогою форм-факторів дає змогу порівнювати й узагальнювати дані про розсіяння при різних енергіях та кутах. Точний зв'язок форм-факторів з перерізами розглядається в Задачі 6.1. Зрештою, щойно виведені нами загальні обмеження при  $q^2 = 0$  справедливі й для протона:  $F_1(0) = 1$  і  $2F_2(0) = (g_p - 2)$ , хоча  $g$ -фактор протона відрізняється від діракового значення на 40 відсотків.

### § 6.3. Електронна вершинна функція: обчислення

Тепер, знаючи з виразу (6.33) загальний вигляд відповіді, ми вже готові розпочинати обчислення однопетльової поправки до вершинної функції електрона. Позначимо імпульси на діаграмі:



Застосувавши фейнманові правила, одержимо в першому порядку за  $\alpha$ , що  $\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + \delta\Gamma^\mu$ , де

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(p', p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \times \\ &\times \bar{u}(p') (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\rho) u(p) = \quad (6.38) \\ &= 2ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu] u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \end{aligned}$$

У третьому рядку ми скористалися тотожністю  $\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho g_{\nu\rho} = \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu$ . Зазначимо, що члени  $+i\epsilon$  в знаменниках вилучати не можна, бо вони знадобляться для правильного обчислення інтеграла по петлі.

Інтеграл має жахливий вигляд, і, насправду, його обчислення є непростим. Такі інтеграли вимагають особливого підходу, відомого як метод

*фейнманових параметрів* (хоча дуже схожий спосіб раніше запропонував Швінгер).

### Фейнманові параметри

Суть цього методу полягає в приведенні добутку трьох знаменників у (6.38) до одного квадратичного полінома по  $k$ , піднесеного до кубу. Потім ми зможемо перевизначити змінну на певну константу, щоб перетворити поліном на повний квадрат і без особливих зусиль обчислити отриманий сферично-симетричний інтеграл. Однак за це доведеться заплатити впровадженням деяких довільних параметрів, за якими також треба інтегрувати.

Почнемо з розгляду простішого випадку двох множників у знаменнику. Застосуємо тотожність

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}. \quad (6.39)$$

Один з прикладів її використання:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-k)^2(k^2-m^2)} &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p) + y(k^2-m^2)]^2} = \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2]^2}. \end{aligned}$$

Підставивши  $\ell \equiv k - xp$ , ми побачимо, що знаменник залежить лише від  $\ell^2$ . Тепер інтегрувати по  $d^4k$  набагато простіше, бо  $d^4k = d^4\ell$ , а підінтегральний вираз сферично-симетричний за  $\ell$ . Змінні  $x$  та  $y$ , які було впроваджено, щоб зробити можливою таку трансформацію, називаються *фейнмановими параметрами*.

Наш інтеграл (6.38) має знаменник уже з трьома множниками, тож ми потребуємо дещо іншої тотожності. Продиференціювавши (6.39) по  $B$ , легко довести, що

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}}. \quad (6.40)$$

Проте цього ще замало. Нам потрібна формула вигляду

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n}. \quad (6.41)$$

Доведення проводиться за індукцією. При  $n = 2$  цей вираз збігається з (6.39), а крок індукції є нескладним і полягає в застосуванні виразу (6.40).

Послідовно продиференціювавши (6.41), можемо вивести ще загальнішу тотожність:

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \times \times \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)}. \quad (6.42)$$

Ця формула справедлива навіть тоді, коли  $m_i$  не є цілими. У § 10.5 ми матимемо справу якраз із таким випадком.

### Обчислення форм-факторів

Застосуємо формулу (6.41) до знаменника в (6.38):

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\varepsilon)(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3},$$

де в знаменнику правої частини

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 + (x+y+z)i\varepsilon = \\ &= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x-y)m^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.43)$$

У другому рядку було використано рівності  $x+y+z=1$  і  $k' = k+q$ . Тепер перевизначимо змінну  $k$ , щоб отримати повний квадрат:

$$\ell \equiv k + yq - zp.$$

Після суто алгебраїчних викладок знаходимо, що  $D$  спрощується до

$$D = \ell^2 - \Delta + i\varepsilon,$$

де

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1-z)^2 m^2. \quad (6.44)$$

Оскільки в процесі розсіяння  $q^2 < 0$ , то  $\Delta$  позитивна. Вважатимемо її ефективним масовим членом.

Далі виразимо чисельник у (6.38) через  $\ell$ . Ця задача значно спроститься, коли взяти до уваги, що  $D$  залежить лише від абсолютного значення  $\ell$ ,

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{D^3} = 0; \quad (6.45)$$

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4} g^{\mu\nu} \ell^2}{D^3}. \quad (6.46)$$

Перша рівність випливає з симетрії. Для доведення другої відзначимо, що інтеграл обертається на нуль, якщо  $\mu \neq \nu$ . Таким чином, лоренц-інваріантність вимагає, щоб результат був пропорційним  $g^{\mu\nu}$ . Для перевірки правильності коефіцієнта треба просто згорнути обидві частини з  $g_{\mu\nu}$ . Скориставшись цими тотожностями, легко знайти, що

$$\begin{aligned} \text{Чисельник} &= \bar{u}(p') \left[ \not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu \right] u(p) \rightarrow \\ &\rightarrow \bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} \gamma^\mu \ell^2 + (-y \not{q} + z \not{p}) \gamma^\mu ((1-y) \not{q} + z \not{p}) + \right. \\ &\quad \left. + m^2 \gamma^\mu - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p). \end{aligned}$$

(Майте на увазі, що  $k' = k + q$ ).

Алгебра Дірака дозволяє привести цей вираз до компактнішого вигляду — на що знадобиться десь сторінка або дві викладок. Саме зараз компенсуються зусилля, що їх ми витратили на обчислення наприкінці попереднього параграфу, оскільки нам відомо загальний вигляд очікуваної відповіді. Насамкінець усі отримані доданки треба зібрати у дві групи, пропорційні відповідно до  $\gamma^\mu$  і  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ . Найкоротший шлях полягає в тому, щоб намагатися отримати вираз типу

$$\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C,$$

так само, як і в (6.31). Для приведення до такого вигляду потрібні лише співвідношення антикомутації (наприклад,  $\not{p} \gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu \not{p}$ ) і рівняння Дірака  $\not{p} u(p) = m u(p)$  та  $\bar{u}(p') \not{p} = \bar{u}(p') m$ ; з цього, між іншим, випливає, що  $\bar{u}(p') \not{q} u(p) = 0$ . Також варто пам'ятати, що  $x + y + z = 1$ . А коли розвіється дим, отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Чисельник} &= \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \cdot \left( -\frac{1}{2} \ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y) \right] u(p). \end{aligned}$$

Відповідно до тотожності Варда, коефіцієнт при  $q^\mu$  має дорівнювати нулю — ми обговорювали це після (6.31). І справді, знаменник, як випливає з (6.44), симетричний до заміни  $x \leftrightarrow y$ . Множник при  $q^\mu$  в чисельнику непарний відносно  $x \leftrightarrow y$ , а отже, обертається на нуль після інтегрування по  $x$  та  $y$ .

Дотримуючись схеми попереднього параграфу, застосуємо тотожність Гордона (6.32) і запишемо  $(p' + p)$  через  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ . Наш повний вираз для внеску

$\mathcal{O}(\alpha)$  в електронну вершину набуває вигляду

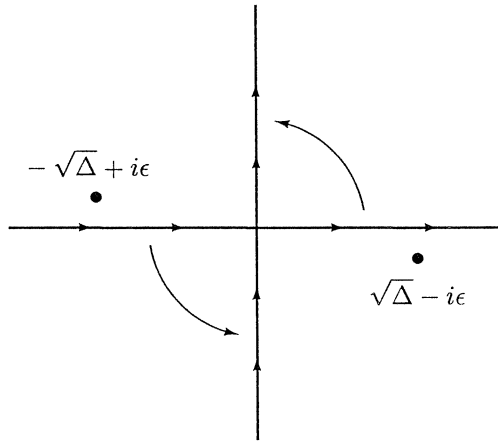
$$\begin{aligned} \delta\Gamma(p', p) = 2ie^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \times \\ \times \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \cdot \left( -\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z-z^2)m^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right] u(p), \end{aligned} \quad (6.47)$$

де, як і раніше,

$$D = \ell^2 - \Delta + i\epsilon, \quad \Delta = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 > 0.$$

Тепер розподіл на форм-фактори є очевидним.

Наймарудніша частина роботи лишилася позаду, і головною нашою задачею стає обчислення інтеграла по імпульсах. Неважко взяти інтеграл по  $\ell^0$ , розглядаючи його як контурний, а потім обчислити інтеграл по просторових компонентах у сферичних координатах. Ми вдамося навіть до простішого прийому, що має назву *вікового повороту*. Зазначимо, що якби не знаки мінус у метриці Мінковського, ми могли б обчислити весь чотиривимірний інтеграл у сферичних координатах. Для усунення незручних мінусів розглянемо контур інтегрування в площині  $\ell^0$  (Рис. 6.1). Розташування по-



**Рис. 6.1.** Контур інтегрування по  $\ell^0$  можна повернути наступним чином.

люсів і той факт, що підінтегральний вираз досить швидко прагне до нуля при великих  $|\ell^0|$ , дають можливість повернути контур на  $90^\circ$  проти часової стрілки. Визначимо тепер *евклідов* 4-імпульс  $\ell_E$ :

$$\ell^0 \equiv i\ell_E^0; \quad \ell = \ell_E. \quad (6.48)$$

Повернутий контур починається від  $\ell_E^0 = -\infty$  і закінчується на  $\ell_E^0 = \infty$ . Замінивши змінні інтегрування на  $\ell_E$ , ми можемо обчислити інтеграл у чотиривимірних сферичних координатах.

Для початку,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 \ell_E \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} = \\ &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}. \end{aligned}$$

Дарма що наразі нас цікавить лише окремий випадок  $m = 3$ , буде корисно знати загальний результат — він знадобиться при обчисленні інших петльових поправок. Множник  $\int d\Omega_4$  є „площею“ поверхні чотиривимірної сфери одиничного радіусу, яка дорівнює  $2\pi^2$ . (Її можна отримати, перейшовши до сферичних координат:

$$x = (r \sin \omega \sin \theta \cos \phi, r \sin \omega \sin \theta \sin \phi, r \sin \omega \cos \theta, r \cos \omega).$$

Міра інтегрування при цьому є  $d^4 x = r^3 \sin^2 \omega \sin \theta d\phi d\theta d\omega dr$ .) Решта інтеграла береться напямую, і остаточно ми маємо

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}. \quad (6.49)$$

Таким самим чином,

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}. \quad (6.50)$$

Зауважимо, що другий результат справедливий лише для  $m > 3$ . При  $m = 3$  віків поворот робити не можна, і такий інтеграл у кожному разі розбігається. Проте саме цей випадок потрібен для (6.47).

Далі ми зрозуміємо фізичний сенс цієї розбіжності, а поки вдамося до штучного прийому, щоб зробити інтеграл збіжним. Для цього повернемося до початкового виразу для фейнманового інтеграла (6.38) і змінимо фотонний пропагатор:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (6.51)$$

де  $\Lambda$  — деяка дуже велика маса. Така заміна не впливає на інтеграл у діапазоні малих  $k$  (бо  $\Lambda$  є великою), проте при  $k \gtrsim \Lambda$  він м'яко обрізується.



Вважатимемо другий член у (6.51) пропагатором якогось фіктивного важкого фотона, чий внесок віднімається від внеску звичайного фотона. Для цього пропагатора чисельник залишається незмінним, а в знаменнику

$$\Delta \rightarrow \Delta_\Lambda = -x y q^2 + (1 - z)^2 m^2 + z \Lambda^2. \quad (6.52)$$

Тепер інтеграл (6.50) збігається, і ми можемо, здійснивши віків поворот, обчислити його:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left( \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left( \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^3} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^3} \right) = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (6.53)$$

До збіжних членів у (6.47) ще додаються поправки порядку  $\Lambda^{-2}$ , проте ними ми тут знехтували.

Спосіб регуляризації фейнманових інтегралів через впровадження фіктивних важких часток має назву *регуляризації Паулі–Вілларса*. Слід, однак, мати на увазі, що поява фіктивного фотона не має жодного фізичного сенсу, і такий спосіб регуляризації є лише одним з багатьох можливих. (Ми розглянемо їх у наступному розділі, зокрема в Задачі 7.2.) А поки покладаємо сподівання на те, що в остаточному виразі для спостережних перерізів новий параметр  $\Lambda$  буде відсутній.

Скориставшись формулами (6.49) та (6.53) для обчислення інтегралів у (6.47), ми одержимо явний, хоч і доволі громіздкий, вираз для однопетльової поправки до вершинної функції:

$$\begin{aligned} \text{[Diagram: A vertex correction diagram with a fermion line and a photon loop]} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \\ &\times \bar{u}(p') \left( \gamma^\mu \left[ \log \frac{z \Lambda^2}{\Delta} + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2}{\Delta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \frac{2m^2 z(1-z)}{\Delta} \right) u(p). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Вирази у квадратних дужках і є бажаними поправками до форм-факторів.

Перед аналізом цього результату підсумуємо використані обчислювальні методи. Вони типові для будь-яких розрахунків з петлями.

1. Зображаємо діаграму (діаграми) і виписуємо вираз для амплітуди.
2. Впроваджуємо фейнманові параметри і об'єднуємо добутки знаменників пропагаторів.

3. Приводимо знаменник до повного квадрату, перевизначивши петльову імпульсну змінну  $k \rightarrow \ell$ .
4. Перепишемо чисельник через  $\ell$ . Відкидаємо непарні степені  $\ell$ , а до парних застосовуємо тотожності на зразок (6.46).
5. Вдавшись до вікового повороту, обчислюємо інтеграл по імпульсу в чотиривимірних сферичних координатах.

На останньому етапі інтеграл по імпульсах часто виявляється розбіжним. У цьому разі слід довизначити (або *регуляризувати*) інтеграл, застосувавши метод Паулі-Віллара або якийсь інший.

Тепер спробуємо розібратися з ультрафіолетовою розбіжністю, параметризованою в (6.54). Зазначимо, що розбіжність виникає в найнеприємнішому місці. Вона робить внесок у форм-фактор  $F_1$  при  $q^2 = 0$ , тоді як у попередньому параграфі ми встановили, що  $F_1(0)$  має дорівнювати одиниці. Проте це єдиний наслідок наявності розбіжності. Тому прийнемо просту, але цілком доречну для цього випадку (тобто, *ad hoc*) процедуру фіксації розбіжного члена, віднявши від (6.54) величину, пропорційну вершинній функції нульового порядку  $\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)$  таким чином, щоб виконувалась умова  $F_1(0) = 1$ . Інакше кажучи, проведемо заміну

$$\delta F_1(q^2) \rightarrow \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0) \quad (6.55)$$

(де  $\delta F_1$  — поправка першого порядку до  $F_1$ ). Для обґрунтування такої процедури треба трохи підправити вираз для  $S$ -матриці (4.103). Кількома словами, заміна (6.55) компенсує вилучення діаграм з поправками до зовнішніх ліній у (6.1). Усі пояснення з приводу правомірності такої заміни відкладемо до § 7.2.

Крім ультрафіолетової,  $F_1(q^2)$  містить ще й інфрачервону розбіжність, що виникає від доданка з  $\Delta^{-1}$ . Так, при  $q^2 = 0$  цей доданок є

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1-4z+z^2}{\Delta(q^2=0)} &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2+(1-z)(3-z)}{m^2(1-z)^2} = \\ &= \int_0^1 dz \frac{-2}{m^2(1-z)} + \text{скінченні члени.} \end{aligned}$$

Цю хворобу теж можна вилікувати, припустивши, що фотон має невелику масу  $\mu$ . Тоді в знаменнику фотонного пропагатора  $(k-p)^2$  перетвориться на  $(k-p)^2 - \mu^2$ , а в  $\Delta$  з'явиться додатковий член  $zm^2$ . У наступних двох параграфах ми детально розглянемо інфрачервону розбіжність.

З урахуванням обох цих проміжних змін, вирази для форм-факторів стають

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[ \log \frac{m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} + \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy + \mu^2 z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2); \quad (6.56)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[ \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (6.57)$$

Зазначимо, що жодна з розбіжностей не впливає на  $F_2(q^2)$ . Тому ми можемо однозначно обчислити

$$\begin{aligned} F_2(q^2 = 0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[ \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Таким чином, поправка до  $g$ -фактора електрона є

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011614. \quad (6.59)$$

Вперше цей результат отримав Швінгер у 1948 р.<sup>29</sup> Досліди дають  $a_e = 0,0011597$ . Як бачимо, знайдене нами значення  $F_2(0)$  є правильним з точністю до вищих порядків  $\alpha$ .

## Перевірка точності КЕД

Після успішних передбачень КЕД для  $a_e$  в порядку  $\alpha$  наступні покоління фізиків підвищили точність як теоретичних розрахунків, так і дослідів для визначення цієї величини. На момент написання цієї книги коефіцієнти в теоретичній формулі КЕД для  $a_e$  були відомі аж до членів порядку  $\alpha^4$ . Обчислення поправок з  $\alpha^2$  і вище потребує розробленої схеми поводження з ультрафіолетовими розбіжностями.

<sup>29</sup>J. Schwinger, *Phys. Rev.* 73, 416L (1948).

Результати теоретичних обчислень щоразу підтверджувалися дедалі точнішими дослідями. Останні вимірювання  $a_e$  спиралися на методику, розроблену Ван Дайком, Швінбергом і Демелтом, яка полягає в тому, що одиночні електрони захоплюються системою електро- і магнітостатичних полів, після чого збуджуються в спіновому резонансі.<sup>30</sup> Наразі експериментальне і теоретичне значення  $a_e$  узгоджуються з точністю до восьмого знаку після коми.

Розрахунок поправок вищих порядків КЕД було проведено для багатьох інших величин. До них належать енергії переходів між рівнями атому водню та воднеподібних атомів, аномальний магнітний момент мюона, ширина розпаду синглетного і триплетного позитронію. Більшість цих величин з високою точністю вимірювалися в експериментах. Сукупність цих порівнянь представляє детальну перевірку справедливості КЕД у різних ситуаціях. Результати наведено в Таблиці 6.1.

При демонстрації результатів точного порівняння теорії КЕД з дослідями виникає певний нюанс, позаяк теоретичні розрахунки вимагають якнайточнішого значення  $\alpha$ , яке можна отримати лише з іншого точного експерименту. Тому ми наводимо кожне порівняння теорії з дослідом, як незалежне визначення  $\alpha$ . Кожній величині  $\alpha$  приписується похибка, яка складається з очікуваних неточностей, що випливають з теорії та експерименту. КЕД підтверджується до тієї міри, до якої збігаються значення  $\alpha$ , отримані різними шляхами.

Перші дев'ять рядків у Таблиці 6.1 ґрунтуються на розрахунках КЕД в атомній фізиці. Зокрема, надтонке розщеплення рівнів у атомі водню, виміряне з використанням водневого мазера Ремзі, є найточніше виміряною величиною у фізиці. На жаль, вплив внутрішньої структури протона призводить до невизначеностей, що задають межу точності, з якою ця величина може бути розрахована в теорії. Таке ж ускладнення виникає при розгляді лембового зсуву — розщеплення між  $j = 1/2$   $2S$ - і  $2P$ -рівнями водню. Тому найточніші досліді з перевірки КЕД проводяться над системами, що не містять сильно взаємодіючих часток, наприклад, експерименти з визначення  $(g - 2)$ -фактора електрона і надтонкого розщеплення в атомі мюонію  $e^- \mu^+$ . Останнім у групі дослідів з перевірки КЕД при низьких енергіях наведено новий метод визначення  $\alpha$ , що полягає в перетворенні дуже точно виміряної комптонової довжини хвилі нейтрона до значення електронної маси з використанням дуже точно відомого співвідношення мас. Це можна поєднати з відомим значенням постійної Рідберга та точної формули КЕД, щоб знайти  $\alpha$ . Єдине суттєве відхилення від решти значень постійної тонкої структури одержано в досліді з вимірювання ширини розпаду трипле-

<sup>30</sup>R. Van Dyck, Jr., P. Schwinberg, H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* 59, 26 (1987).

**Табл. 6.1.** Значення  $\alpha^{-1}$ , одержані в результаті точних експериментів.*КЕД при низьких енергіях:*

Значення $(g - 2)$ для електрона	137,035 992 35 (73)
Значення $(g - 2)$ для мюона	137,035 5 (1 1)
Надтонке розщеплення в мюонії	137,035 994 (18)
Лембів зсув	137,036 8 (7)
Надтонке розщеплення у водні	137,036 0 (3)
$2^3S_1 - ^3S_1$ -розщеплення в позитронії	137,034 (16)
Ширина розпаду $^1S_0$ -стану позитронію	137,00 (6)
Ширина розпаду $^3S_1$ -стану позитронію	136,971 (6)
Комптонова довжина хвилі нейтрона	137,036 010 1 (5 4)

*КЕД при високих енергіях:*

$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-e^+e^-)$	136,5 (2,7)
$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-\mu^+\mu^-)$	139,9 (1,2)

*Фізика твердого тіла:*

Квантовий ефект Холла	137,035 997 9 (3 2)
Ефект Джозефсона	137,035 977 0 (7 7)

Кожне значення  $\alpha$  одержано при порівнянні відповідного експерименту з теоретичним виразом, що містить  $\alpha$  як параметр. Числа в дужках — стандартні помилки в останніх цифрах, причому враховані і експеримент, і теорія. Ця таблиця ґрунтується на результатах, представлених у книзі Т. Кіношіти (1990), яка містить цілу низку ясно написаних оглядів по теорії та технології експерименту з перевірки КЕД. П'ять найточніших значень наведені Т. Кіношітою в книзі *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics*, Н. Newman and Т. Ypsilantis, eds. (Plenum Press, New York, 1995). У цій книзі, крім іншого, йдеться про перспективи майбутніх точних дослідів з перевірки КЕД.

тного стану позитронію. Проте є всі підстави вважати, що значну поправку до величини, наведеної в таблиці, вносять діаграми порядку  $\alpha^2$ .

Наступні два пункти стосуються визначення  $\alpha$  з реакцій вищого порядку КЕД на електронних колайдерах високих енергій. Зазвичай ці експерименти забезпечують точність лише на рівні відсотків, але надзвичайно важливо, що їхні результати узгоджуються з точними даними, одержаними при низьких енергіях.

Нарешті, у двох останніх рядках таблиці наведено результати незалежних вимірювань  $\alpha$  в дослідях, пов'язаних з екзотичними квантовими інтерференційними явищами у фізиці конденсованих станів. У цих дослідях вимірюються, відповідно, стандартний опір і стандартна частота. Вважається, що при цьому вимірюється заряд електрона, причому поправки до

його значення в макроскопічних системах є строго нульовими.<sup>31</sup>

Загальна картина насправду вражає уяву. На підставі доказів, зібраних у таблиці, ми можемо стверджувати, що КЕД є найточніше перевіреною — а тому найуспішнішою — з усіх фізичних теорій.

## § 6.4. Електронна вершинна функція: інфрачервона розбіжність

Тепер розберемося з інфрачервonoю розбіжністю у нашому результаті (6.56) для  $F_1(q^2)$ . У наближенні  $\mu \rightarrow 0$  головний внесок в інтеграл є

$$F_1(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \left[ \frac{m^2(1 - 4z + z^2) + q^2(1 - x)(1 - y)}{m^2(1 - z)^2 - q^2xy + \mu^2z} - \frac{m^2(1 - 4z + z^2)}{m^2(1 - z)^2 + \mu^2z} \right]. \quad (6.60)$$

Для розуміння цього виразу його слід трохи спростити, виокремивши й обчисливши розбіжну частину інтеграла. Надалі в цьому параграфі залишатимемо тільки члени, що розбігаються при  $\mu \rightarrow 0$ .

Насамперед зауважимо, що розбіжність виникає в тій ділянці простору фейнманових параметрів, де  $z \approx 1$  (а отже,  $\approx y \approx 0$ ). За цих умов можна вважати, що в чисельниках виразу (6.60)  $z = 1$  і  $x = y = 0$ . Крім того, можна встановити  $z = 1$  в членах з  $\mu^2$  у знаменниках. Скориставшись дельта-функцією для обчислення інтеграла по  $x$ , маємо

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2(1 - z)^2 - q^2y(1 - z - y) + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1 - z)^2 + \mu^2} \right].$$

(Нижня межа в інтегралі по  $z$  неістотна.) Після заміни змінних

$$y = (1 - z)\xi, \quad w = (1 - z),$$

вираз набуває вигляду

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \frac{1}{2} \int_0^1 dw^2 \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{[m^2 - q^2\xi(1 - \xi)]w^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2w^2 + \mu^2} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1 - \xi)} \log \left( \frac{m^2 - q^2\xi(1 - \xi)}{\mu^2} \right) + 2 \log \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

<sup>31</sup> Детально про ці ефекти та про їх стосунок до вимірювання  $\alpha$  див. D. R. Yennie, *Rev. Mod. Phys.* 59, 781 (1987).

У наближенні  $\mu \rightarrow 0$  ми можемо знехтувати особливостями структури чисельників під логарифмом, оскільки всі величини, пропорційні  $m^2$  або  $q^2$ , мають однаковий порядок. А отже, можемо записати

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (6.61)$$

де коефіцієнт при розбіжному логарифмі,

$$f_{\text{IR}}(q^2) = \int_0^1 \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} d\xi - 1. \quad (6.62)$$

Оскільки  $q^2$  є від'ємною величиною, а максимальне значення  $\xi(1-\xi)$  дорівнює  $1/4$ , то перший член у цьому виразі більший за одиницю, а отже,  $f_{\text{IR}}(q^2)$  є позитивним.

Яким чином такий нескінченний доданок впливає на переріз розсіяння електрона на потенціалі? Оскільки  $F_1(q^2)$  у матричному елементі перемножується на  $\gamma^\mu$ , то, зробивши заміну  $e \rightarrow e \cdot F_1(q^2)$ , можемо знайти новий вираз для перерізу. Для процесу  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$  це

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right], \quad (6.63)$$

де перший множник є диференціальним перерізом у деревовидному наближенні. Відзначимо, що поправка до перерізу порядку  $\mathcal{O}(\alpha)$  не лише нескінченна, а ще й негативна. Це означає, що наша теорія має серйозні негаразди.

Для кращого розуміння природи розбіжності оцінимо поведінку коефіцієнта при розбіжному логарифмі,  $f_{\text{IR}}(q^2)$ , в межі  $-q^2 \rightarrow \infty$ . У цьому наближенні виникає ще один логарифм:

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2/2}{-q^2\xi(1-\xi) + m^2} &\simeq \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} + \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2(1-\xi) + m^2} = \\ &= \int_0^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} = \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Відповідно, форм-фактор

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (6.65)$$

Зверніть увагу, що чисельник у другому логарифмі є не  $m^2$ , а  $-q^2$ , отже, цей вираз містить правильний множник не лише при  $\log(1/\mu^2)$ , а й при  $\log^2(-q^2)$ .

Такий самий подвійний логарифм від  $-q^2$  виникає у виразі для перерізу м'якого гальмівного випромінювання (6.26). Це підказує нам спосіб подолання проблеми інфрачервоній розбіжності. Порівнюючи (6.65) з (6.26), бачимо, що при  $-q^2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[ + \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right].\end{aligned}\quad (6.66)$$

Кожен з цих перерізів окремо розбігається, але їхня сума не залежить від  $\mu$ , а отже, є скінченною.

Насправді ж ні переріз пружного розсіяння, ні переріз м'якого гальмівного випромінювання не піддається незалежному вимірюванню, спостережною величиною є лише їхня сума. В будь-якому реальному досліді детектор може реєструвати фотони з енергією не нижчою від певної порогової енергії  $E_\ell$ . Імовірність того, що розсіяння відбулося, проте детектор не зміг зареєструвати фотон, дорівнює сумі

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(k < E_\ell)) \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}}. \quad (6.67)$$

Розбіжна частина цього „вимірюваного“ диференційного перерізу,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} &\approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{\mu^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \log\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]\end{aligned}$$

Ми вже бачили, що  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$  при  $-q^2 \gg m^2$ . Якщо таке співвідношення справедливе для довільних  $q^2$ , то вимірюваний переріз є

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ або } m^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \quad (6.68)$$

Він визначається експериментальними умовами, але більше не залежить від  $\mu^2$ . Інфрачервоні розбіжності в перерізі м'якого гальмівного випромінювання і в  $F_1(q^2)$  взаємно скорочуються, і в підсумку ми маємо скінченний переріз для величини, яку реально можна виміряти.



Ми ще маємо довести, що співвідношення  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$  справедливе для довільних  $q^2$ . З (6.13) отримуємо

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \left( \frac{2p \cdot p'}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p)^2} \right). \quad (6.69)$$

Неважко обчислити останні два члени:

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{k} \cdot p)^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{1}{(p^0 - p \cos \theta)^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{m^2}.$$

У першому доданку ми можемо об'єднати знаменники за допомогою фейнманових параметрів і привести інтеграл до вигляду

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} &= \int_0^1 d\xi \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{[\xi \hat{k} \cdot p' + (1 - \xi) \hat{k} \cdot p]^2} = \\ &= \int_0^1 d\xi \frac{1}{[\xi p' + (1 - \xi)p]^2} = \int_0^1 d\xi \frac{1}{m^2 - \xi(1 - \xi)q^2}, \end{aligned}$$

де на останньому кроці ми скористалися співвідношенням  $2p \cdot p' = 2m^2 - q^2$ . Зібравши всі члени (6.69), в остаточному підсумку маємо

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int_0^1 \frac{2m^2 - q^2}{m^2 - \xi(1 - \xi)q^2} d\xi - 2 = 2f_{\text{IR}}(q^2), \quad (6.70)$$

що й потребували для скорочення інфрачервоних розбіжностей.

Хоча (6.68) і демонструє, що інфрачервоні розбіжності скорочуються, практичної користі від цього виразу небагато, бо для проведення дослідів бажано знати точну залежність від  $q^2$ , а ми її належним чином не обчислили. Проте згадаймо з (6.65), що в наближенні  $-q^2 \gg m^2$  ми змогли отримати правильний коефіцієнт при  $\log^2(-q^2)$ . У цьому разі (6.68) набуває вигляду

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{вимірюваний}} \approx \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \log \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) \log \left( \frac{-q^2}{E_\ell^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right], \quad (6.71)$$

Такий результат є однозначним і корисним. Зауважимо, що поправка порядку  $\mathcal{O}(\alpha)$  знову містить судаківський подвійний логарифм.

## § 6.5. Підрахунок та інтерпретація інфрачервоних розбіжностей

Розгляд інфрачервоних розбіжностей у попередньому параграфі дає достатні методи для усунення нескінченостей в обчисленнях гальмівного випромінювання і вершинних поправок. Проте лишилися нез'ясованими три суттєві моменти:

1. Ми не продемонстрували скорочення розбіжностей у вищих порядках.
2. Поправка до спостережної величини перерізу (6.68) і (6.71), одержана після скорочення інфрачервоних розбіжностей, буде необмежено зростати (зі знаком мінус), якщо створювати фотонні детектори з дедалі меншою пороговою енергією  $E_\ell$ .
3. Досі не вдалося відтворити класичний результат (6.19) для кількості фотонів, випромінених при зіткненні.

Друга та третя проблеми природним чином вирішуються, коли вирішити першу, до цього ми зараз і візьмемося.

Повне доведення факту скорочення в усіх порядках інфрачервоних розбіжностей виходить за рамки нашого курсу.<sup>32</sup> Ми ж розглянемо лише найсильніші, логарифмічні члени, що виникають у кожному порядку теорії збурень. Загалом, такі члени мають порядок

$$\left[ \log \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \log \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) \right]^n \quad (6.72)$$

у  $n$ -ому порядку теорії збурень. Остаточні фізичні висновки було вперше сформульовано у праці Блоха та Нордсіка, фактично написаної ще до створення квантової релятивістської теорії.<sup>33</sup> Ми ж дотримуватимемося сучасної і спрощеної версії їхнього аналізу, запропонованої Вайнбергом.<sup>34</sup>

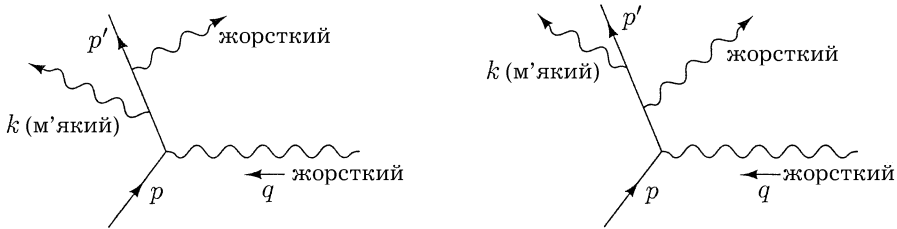
Інфрачервоні розбіжності виникають через внесок фотонів з „м'якими“ імпульсами — як реальних, з енергіями меншими від  $E_\ell$ , так і віртуальних, з  $k^2 < E_\ell^2$  (після здійснення вікового повороту). Типова діаграма вищого порядку містить велику кількість реальних і віртуальних фотонних ліній.

<sup>32</sup> Детальне дослідження цього питання див. D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, *Aim. Phys.* 13, 379 (1961).

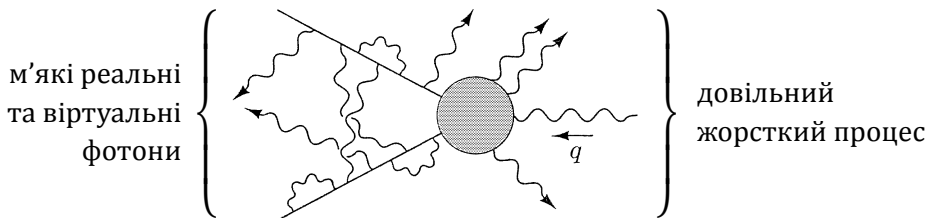
<sup>33</sup> F. Bloch, A. Nordsieck, *Phys. Rev.* 52, 54 (1937).

<sup>34</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev.* 140, B516 (1965).

Проте для виникнення розбіжності недостатньо мати м'який фотон, потрібна ще й сингулярність у пропагаторі електрона. Розглянемо, наприклад, такі дві діаграми:

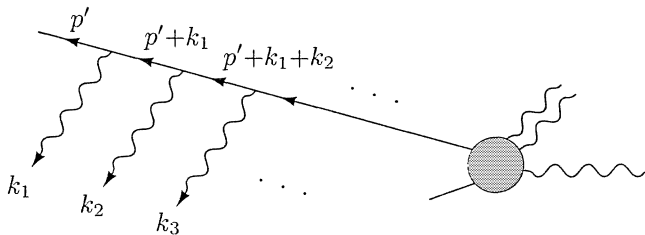


Перша з них, у якій електрон випромінює спершу м'який, а потім жорсткий фотон, не має інфрачервоної розбіжності, бо імпульси в обох електронних пропагаторах лежать далеко від масової поверхні. Та якщо останнім випромінюється не жорсткий, а м'який фотон, знаменник у відповідному пропагаторі  $\epsilon (p' + k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k$  і обертається на нуль нуль при  $k \rightarrow 0$ . Отже, друга діаграма справді містить розбіжність. Тому ми розглядатимемо такі діаграми, де довільний жорсткий процес, який, можливо, супроводжується випромінюванням жорстких або м'яких фотонів, змінено таким чином, що до зовнішніх електронних ліній долучено лінії м'яких реальних та віртуальних фотонів:



За методом Вайнберга, підсумуємо внески від усіх таких діаграм. Єдине нове ускладнення з'являється тут через комбінаторику підрахунку всіх способів, за якими може виникнути фотон.

Насамперед розглянемо зовнішню лінію вихідного електрона:



Прикріпимо до неї  $n$  фотонів з імпульсами  $k_1 \cdots k_n$  і поки не переймаємося тим, які саме ці фотони — реальні, віртуальні, поєднані між собою,

чи віртуальні, зв'язані з вершинами на вхідній електронній лінії. Діракова структура діаграми є такою:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + m)}{2p' \cdot k_1}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \not{k}_2 + m)}{2p' \cdot (k_1 + k_2) + \mathcal{O}(k^2)} \dots \\ \dots (-ie\gamma^{\mu_n})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \dots + \not{k}_n + m)}{2p' \cdot (k_1 + \dots + k_n) + \mathcal{O}(k^2)}(i\mathcal{M}_{\text{жорсткий}}) \dots \end{aligned} \quad (6.73)$$

Вважатимемо, що всі  $k_i$  малі, і членами в знаменниках порядку  $\mathcal{O}(k^2)$  можна знехтувати. Відкинемо, як і в § 6.1, доданки на зразок  $\not{k}_i$  в чисельниках. Також ми можемо перемістити множники  $(\not{p}' + m)$  вліво і скористатися рівнянням  $\bar{u}(p')(-\not{p}' + m) = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^{\mu_1}(\not{p}' + m)\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m) \dots = \bar{u}(p') 2p'^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m) \dots = \\ = \bar{u}(p') 2p'^{\mu_1} 2p'^{\mu_2} \dots \end{aligned}$$

Вираз (6.73) перетворюється на

$$\bar{u}(p')\left(e \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1}\right)\left(e \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot (k_1 + k_2)}\right) \dots \left(e \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot (k_1 + \dots + k_n)}\right) \dots \quad (6.74)$$

Продовжуючи розглядати лише вихідну електронну лінію, ми маємо тепер підсумувати за всіма перестановками  $k_1 \dots k_n$ . (Якщо два фотони поєднані й утворюють один віртуальний фотон, його буде враховано двічі. Як з цим бути, розберемося згодом.) У сумі присутні  $n$  різних діаграм, що відповідають  $n!$  перестановкам  $n!$  фотонних імпульсів. Позначимо таку перестановку як  $\pi$ , тож  $\pi(i)$  є числом між 1 і  $n$ , в яке  $i$  переходить при перестановці. (Наприклад, якщо  $\pi$  позначає перестановку  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$  і  $3 \rightarrow 2$ , то  $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1$  і  $\pi(3) = 2$ .)

Озброєні таким визначенням, ми можемо підсумувати за всіма перестановками, вдавшись до тотожності

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{всі} \\ \text{перестановки } \pi}} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \dots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)} + \dots + k_{\pi(n)})} = \\ = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \dots \frac{1}{p \cdot k_n}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Доведення цієї формули проводиться за індукцією. При  $n = 2$  маємо

$$\begin{aligned} \sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} &= \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2)} + \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2)} = \\ &= \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2}. \end{aligned}$$

Щоб здійснити крок індукції, зауважимо, що останній множник зліва в (6.75) не змінюється при довільній перестановці  $\pi$ . Після його винесення за знак суми, ліва частина рівності стає

$$\text{ЛЧ} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \cdots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + \cdots + k_{\pi(n-1)})}.$$

Для будь-якого заданого  $\pi$  величина під знаком суми не залежить від  $k_{\pi(1)}$ . Встановивши  $i = \pi(n)$ , можемо записати:

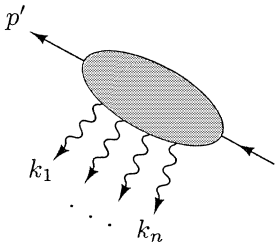
$$\sum_{\pi} = \sum_{i=1}^n \sum_{\pi'(i)}$$

де  $\pi'(i)$  є всі перестановки решти  $n - 1$  чисел. Припустимо за індукцією, що (6.75) справедливе для  $n - 1$ . Тоді

$$\text{ЛЧ} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \cdots \frac{1}{p \cdot k_{i-1}} \frac{1}{p \cdot k_{i+2}} \cdots \frac{1}{p \cdot k_n}.$$

Помноживши і розділивши кожен член у сумі на  $p \cdot k_i$ , ми легко отримаємо бажаний результат (6.75).

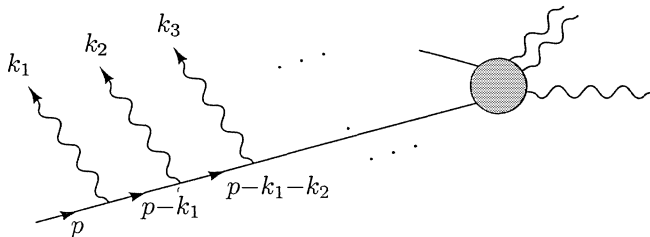
Застосувавши (6.75) до (6.74), знайдемо



$$= \bar{u}(p') \left( e \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} \right) \left( e \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} \right) \cdots \left( e \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} \right), \quad (6.76)$$

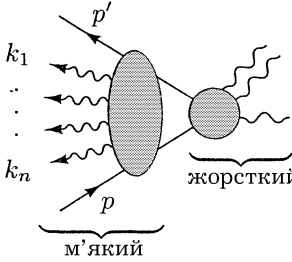
де сіра зона відповідає сумі за всіма можливими способами вставлення  $n$  фотонних ліній.

Таким самим чином можемо спростити суму за всіма м'якими фотонами, прикріпленими до вхідної лінії електрона. Імпульси у проп'агаторах є  $p - k_1$ ,  $p - k_1 - k_2$  і т. д.:



Отже, кожному фотону відповідає додатковий знак мінус, тому  $(p - \Sigma k)^2 - m^2 \approx -2p \cdot \Sigma k$ .

Далі розглянемо діаграми, в яких  $n$  м'яких фотонів у будь-якому можливому порядку поєднані з лінією вхідного або вихідного електрона. Суму таких діаграм можна записати, як



$$= \bar{u}(p') i\mathcal{M}_{\text{жорсткий}} u(p) \cdot e \left( \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} - \frac{p^{\mu_1}}{p \cdot k_1} \right) \cdot e \left( \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} - \frac{p^{\mu_2}}{p \cdot k_2} \right) \cdots \quad (6.77)$$

$$\cdots e \left( \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p \cdot k_n} \right).$$

Розкриваючи дужки у співмножниках, ми переконаємося, що отримуємо правильний внесок для кожного способу розподілу  $n$  фотонів між двома електронними лініями.

Тепер маємо визначити, які фотони є реальними, а які — віртуальними. Ми можемо одержати віртуальний фотон, поєднавши два фотонні імпульси  $k_i$  та  $k_j$ , встановивши  $k_j = -k_i \equiv k$ , помноживши вираз на фотонний пропагатор і проінтегрувавши по всіх  $k$ . Для кожного віртуального фотона маємо вираз

$$\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right) \cdot \left( \frac{p'}{-p' \cdot k} - \frac{p}{-p \cdot k} \right) \equiv \mathbf{X}. \quad (6.78)$$

Множник  $1/2$  є необхідним, оскільки в такій процедурі ми двічі враховуємо кожен фейнманову діаграму — перестановка  $k_i$  і  $k_j$  дає одну й ту саму діаграму. Цей вираз можна обчислити за допомогою контурного інтегрування, проте існує простіший спосіб. Зазначимо, що в рамках нашої наближеної схеми кожній однопетльовій діаграмі, що не містить зовнішніх фотонних ліній, приписується значення

$$\bar{u}(p') (i\mathcal{M}_{\text{жорсткий}}) u(p) \cdot \mathbf{X}.$$

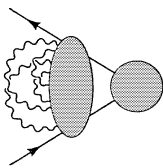
Отже,  $\mathbf{X}$  є інфрачервоною межею однопетльової поправки до форм-фактора в (6.61):

$$\mathbf{X} = -\frac{\alpha}{2\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (6.79)$$

Безпосереднє виведення цього виразу з (6.78) присутнє в цитованій вище праці Вайнберга. Зауважимо, що в попередньому параграфі результат (6.79) було отримано лише після проведення процедури фіксації (6.55) при

$q^2 = 0$ , тому слід подбати про те, чи узгоджується (6.79) з аналогічним обчисленням у діаграмі  $n$ -го порядку. До цього додамо, що деякі з підсумованих діаграм містять поправки до зовнішніх ліній, які ми не розглядаємо. Виявляється, що вони не впливають на кінцевий результат — доведення цього факту, а також деякі інші моменти, які ми пропустили, можна знайти в цитованій на початку параграфу праці Єнні, Фраучі та Суура.

Якщо число віртуальних фотонів є  $m$ , матимемо  $m$  множників типу (6.79) і, крім того, множник  $1/m!$ , який виникає через те, що перестановка імпульсів віртуальних фотонів не змінює діаграми. Для отримання повної поправки, пов'язаної з наявністю довільної кількості м'яких віртуальних фотонів, підсумуємо за  $m$ :



$$= \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^m}{m!} = \bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{\text{жорсткий}})u(p) \exp(\mathbf{X}). \quad (6.80)$$

Якщо на додачу до  $m$  віртуальних фотонів випромінюється реальний фотон, ми маємо помножити на його вектор поляризації, підсумувати за всіма поляризаціями і проінтегрувати квадрат матричного елемента по фазовому простору фотона. У цьому разі виникне додатковий множник

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2k} (-g_{\mu\nu}) \left( \frac{p'^\mu}{p' \cdot k} - \frac{p^\mu}{p \cdot k} \right) \cdot \left( \frac{p'^\nu}{p' \cdot k} - \frac{p^\nu}{p \cdot k} \right) \equiv \mathbf{Y} \quad (6.81)$$

у перерізі. За умови, що енергія фотона більша, ніж  $\mu$ , але менша, ніж  $E_\ell$  (порогова енергія детектора), вираз спрощується:

$$\mathbf{Y} = \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{J}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \log\left(\frac{E_\ell}{\mu}\right) = \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right). \quad (6.82)$$

У випадку випромінювання  $n$  реальних фотонів одержимо  $n$  таких множників, а ще фактор симетрії  $1/n!$  (оскільки в кінцевому стані присутні  $n$  тотожних бозонів). Переріз випромінювання довільної кількості м'яких фотонів є

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' + n\gamma) &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n = \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \cdot \exp(Y). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Об'єднавши результати для реальних і віртуальних фотонів, отримаємо остаточний вираз в усіх порядках за  $\alpha$  для вимірюваного перерізу процесу

$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' +$  (довільна кількість фотонів з  $k < E_\ell$ ):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp(2X) \times (Y) = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Поправочний множник може залежати лише від порогової енергії детектора, але не залежить від інфрачервоного обрізання  $\mu$ . Якщо розкласти цей результат до членів  $\mathcal{O}(\alpha)$ , матимемо формулу (6.68). Однак тепер величина поправочного множника обмежена проміжком між 0 і 1.

У межі  $-q^2 \gg m^2$  наш результат стає

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вимірюваний}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \left| \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right] \right|^2. \quad (6.85)$$

У цьому наближенні ймовірність розсіяння без випромінювання жорсткого фотона прагне до нуля швидше будь-якого степеня  $q^2$ . Експоненційний поправочний множник, що містить подвійний логарифм, має назву *форм-фактора Судакова*.

На завершення цього параграфу обчислимо ймовірність того, що певний процес розсіяння супроводжується випромінюванням  $n$  м'яких фотонів з енергіями в інтервалі від  $E_-$  до  $E_+$ . Інтеграл по їх фазовому простору дає не  $\log(E_\ell/\mu)$ , а  $\log(E_+/E_-)$ . Якщо віднести фотони з енергією, більшою за  $E_+$ , до жорсткої частини процесу, то переріз дорівнює виразу (6.84) з додатковим множником:

$$\begin{aligned} \text{Імовірність}(n\gamma \text{ з } E_- < E < E_+) &= \frac{1}{n!} \left[ \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{E_+^2}{E_-^2}\right) \right]^n \times \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\left(\frac{E_+^2}{E_-^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Цей вираз має вигляд розподілу Пуассона:

$$P(n) = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda},$$

де

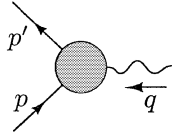
$$\lambda = \langle n \rangle = \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{E_+}{E_-}\right) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'),$$

і збігається з квазікласичною оцінкою числа випромінених фотонів (6.19).



## Задачі

**6.1. Формула Розенблюта.** Як зазначалося в § 6.2, точну вершину електромагнітної взаємодії діракового ферміона можна в загальному вигляді виразити через форм-фактори  $F_1(q^2)$  і  $F_2(q^2)$ :



$$= \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} F_2(q^2) \right] u(p),$$

де  $q = p' - p$  і  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Якщо ферміон також бере участь і в сильній взаємодії (наприклад, протон), у форм-факторах ця взаємодія має бути врахована, а отже, їх не можна вивести з засадничих принципів КЕД. Проте вирази для форм-факторів одержують з дослідів. Розглянемо розсіяння електрона з енергією  $E \gg m_e$  на протоні, що початково перебуває в стані спокою. Покажіть, що наведений вище вираз для вершини призводить до *формули Розенблюта* для перерізу пружного розсіяння в головному порядку за  $\alpha$ , але з урахуванням усіх порядків за сильною взаємодією:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2 \left[ (F_1^2 - \frac{q^2}{4m^2} F_2^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{4m^2} (F_1 + F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}{2E^2 \left[ 1 + \frac{2E}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

де  $\theta$  є кут розсіяння в лабораторній системі відліку, а форм-фактори  $F_1$  і  $F_2$  обчислюються при значенні  $q^2$ , пов'язаному з пружним розсіянням на цей кут. Вимірюючи  $(d\sigma/d \cos \theta)$ , як функцію кута, можна знайти  $F_1$  і  $F_2$ . Зазначимо, що при  $F_1 = 1$  і  $F_2 = 0$  ця формула переходить у формулу Мотта (в безмасовому наближенні) для розсіяння на точковій частці (Задача 5.1).

**6.2. Наближення еквівалентних фотонів.** Розглянемо процес розсіяння високоенергетичних електронів на певній мішені. У головному порядку за  $\alpha$  електрон пов'язаний з мішенню одним фотонним пропaгатором. Якщо початкова та кінцева енергії електрона є відповідно  $E$  і  $E'$ , фотон переносить імпульс  $q$  такий, що  $q^2 \approx 2EE'(1 - \cos \theta)$ . У граничному випадку розсіяння вперед імпульс фотона прагне до  $q^2 = 0$  при будь-якій втраті енергії; звідси переріз має пік у напрямку вперед. Виникає спокуса припустити, що в цій межі віртуальний фотон стає реальним. З'ясуємо, в якому сенсі таке припущення можна вважати правильним.

**(а)** Матричний елемент процесу розсіяння можна записати, як

$$\mathcal{M} = (-ie) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \widehat{\mathcal{M}}^\nu(q),$$

де  $\widehat{\mathcal{M}}^\nu$  позначає (загалом досить складну) вершину взаємодії віртуального фотона з мішенню. Проаналізуємо структуру  $\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$ . Нехай  $q = (q^0, \mathbf{q})$ . Визначимо  $\tilde{q} = (q^0, -\mathbf{q})$ . Добуток співорів можна розкласти на суму:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = A \cdot q^\mu + B \cdot \tilde{q}^\mu + C \cdot \varepsilon_1^\mu + D \cdot \varepsilon_2^\mu,$$

де  $A, B, C, D$  — функції кута розсіяння і втрати енергії, а  $\varepsilon_i$  — два одиничних вектора, нормальних до  $\mathbf{q}$ . Згорнувши цей вираз з  $q_\mu$ , покажіть, що за порядком  $B$  не перевищує  $\theta^2$ . Це означає, що в подальшому аналізі цим коефіцієнтом можна знехтувати. Крім того, дарма що  $A$  велике, його також слід відкинути внаслідок тотожності Варда  $q^\mu \widehat{\mathcal{M}}_\mu = 0$ .

- (b)** Працюючи в системі відліку, де  $p = (E, 0, 0, E)$ , отримайте явний вираз для

$$\bar{u}(p')\gamma \cdot \varepsilon_i u(p).$$

Використайте безмасові електрони, спінори  $u(p)$  та  $u(p')$  з визначеною спіральністю і одиничні вектори  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , один з яких паралельний, а інший перпендикулярний до площини розсіяння. Насправді ця величина потрібна лише для випадку розсіяння вперед, тобто можна обчислювати лише члени порядку  $\theta$ . Зверніть, проте, увагу, що малий  $z$ -компонент  $\varepsilon$ , який лежить у площині розсіяння, також має порядок  $\theta$ , і його треба враховувати.

- (c)** Тепер запишіть вираз для перерізу розсіяння електрона через квадрат матричного елемента. Потім його слід проінтегрувати по кінцевому імпульсу електрона  $p'$ . Інтеграл по  $p'^3$  еквівалентний інтегралові по енергії, втраченій електроном. Покажіть, що інтеграл по  $p'_\perp$  у випадку розсіяння вперед логарифмічно розбігається, якщо  $p'_\perp \rightarrow 0$  або  $\theta \rightarrow 0$ .
- (d)** Розбіжність при  $\theta \rightarrow 0$  виникла через те, що ми надто часто нехтували масою електрона. Покажіть, що при врахуванні маси електрона у виразі для  $q^2$ ,

$$q^2 = -2(EE' - pp' \cos \theta) + 2m^2,$$

логарифмічна розбіжність обрізується, і це призводить до появи множника  $\log(s/m^2)$ .

- (e)** Об'єднавши всі результати і припустивши, що перерізи не залежать від поляризації фотона, покажіть, що найбільшу частину перерізу розсіяння електрона на мішені можна отримати, якщо вважати, що електрон є джерелом пучка реальних фотонів з розподілом по енергії ( $x = E_\gamma/E$ ):

$$N_\gamma(x) dx = \frac{dx}{x} \frac{\alpha}{2\pi} [1 + (1-x)^2] \log\left(\frac{s}{m^2}\right).$$

Це і є *наближенням еквівалентних фотонів* Вайцзекера–Вільямса. Зокрема воно дозволяє вивчати розсіяння світла на світлі, використовуючи  $e^+e^-$ -зіткнення. Відзначимо, що коли розглядати випромінювання м'якого фотона до моменту розсіяння, вищенаведений розподіл збігається з тим, що ми отримали в Задачі 5.5.

**6.3. Екзотичні внески до  $g - 2$ .** Будь-яка частка, що перебуває у взаємодії з електроном, має давати поправки до електрон-фотонних форм-факторів і, зокрема, до  $g - 2$ . Оскільки  $g - 2$  для електрона чудово узгоджується з розрахунками КЕД, поправки дозволяють накладати обмеження на властивості нових гіпотетичних часток.

- (a) В об'єднаній теорії електромагнітної та слабкої взаємодії присутня скалярна частка  $h$ , яку називають *бозоном Гірса*. Вона взаємодіє електроном наступним чином:

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \phi_h \bar{\psi} \psi.$$

Обчисліть внесок віртуального гігсового бозона до електронного ( $g - 2$ )-фактора, виразивши поправку через  $\lambda$  та масу  $m_h$  цього бозона.

- (b) КЕД дає дуже точний вираз для аномального магнітного моменту електрона. Якщо  $a = (g - 2)/2$ ,

$$|a_{\text{експ}} - a_{\text{КЕД}}| < 1 \times 10^{-10}.$$

Які обмеження накладає це на  $\lambda$  і  $m_h$ ? У найпростішій версії електро-слабкої теорії  $\lambda = 3 \times 10^6$  і  $m_h > 60$  Гев. Покажіть, що такі значення узгоджуються з нерівністю для  $a$ . Константа взаємодії гігсового бозона з мюоном більша за електронну в  $(m_\mu/m_e)$  разів:  $\lambda = 6 \times 10^{-4}$ . А отже, попри неточність в експериментальному значенні аномального магнітного моменту мюона,

$$|a_{\text{експ}} - a_{\text{КЕД}}| < 3 \times 10^{-8},$$

ця умова накладає набагато сильніше обмеження на  $m_h$ . Чи досить воно сильне?

- (c) Є складніші варіанти електрослабкої теорії, що містять псевдоскалярну частку *аксіон*, яка взаємодіє з електроном відповідно до

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{i\lambda}{\sqrt{2}} \phi_a \bar{\psi} \gamma^5 \psi.$$

Можливо, аксіон є так само легким, як і електрон, чи навіть легшим, і водночас взаємодіє з електроном сильніше, ніж гігсів бозон. Обчисліть внесок віртуального аксіона до електронного  $g-2$ -фактора і визначте неприпустимі значення  $\lambda$  та  $m_a$ .

## Розділ 7

### Радіаційні поправки: формальний розгляд

Чотири рази впродовж трьох останніх розділів<sup>35</sup> ми вдавалися до певних тверджень (іноді з наведенням мотивації), які не було доведено. Ідеться про таке:

1. Формула (4.86) для ширини розпаду через елементи  $S$ -матриці.
2. Основна формула (4.103) для елементів  $S$ -матриці через фейнманові діаграми.
3. Тотожність Варда (5.79).
4. *Ad hoc* процедура фіксації (6.55) для усунення ультрафіолетової розбіжності в діаграмі вершинної поправки.

Наразі настав час повернутися до цих питань і розглянути їх з належною ретельністю. У §§ 7.2–7.4 ми доведемо всі чотири твердження. Ті знання, що їх ми здобудемо в процесі доведення, дозволять нам інтерпретувати решту петльових поправок для розсіяння електрона на важкій частці — поправки до зовнішніх ліній і поляризацію вакууму. Другу та третю діаграми з (6.1) ми обчислимо в § 7.1, а останню — в § 7.5.

Цей розділ буде абстрактнішим, ніж два попередні. Головною його темою будуть особливості фейнманових діаграм, представлених як аналітичні функції зовнішніх імпульсів. Проте ми виявимо, що це питання, на перший погляд призначене для вузького кола фахівців, насправді породжує чимало фізичних наслідків і проливає світло на зв'язок між фейнмановими діаграмами та загальними принципами квантової теорії.

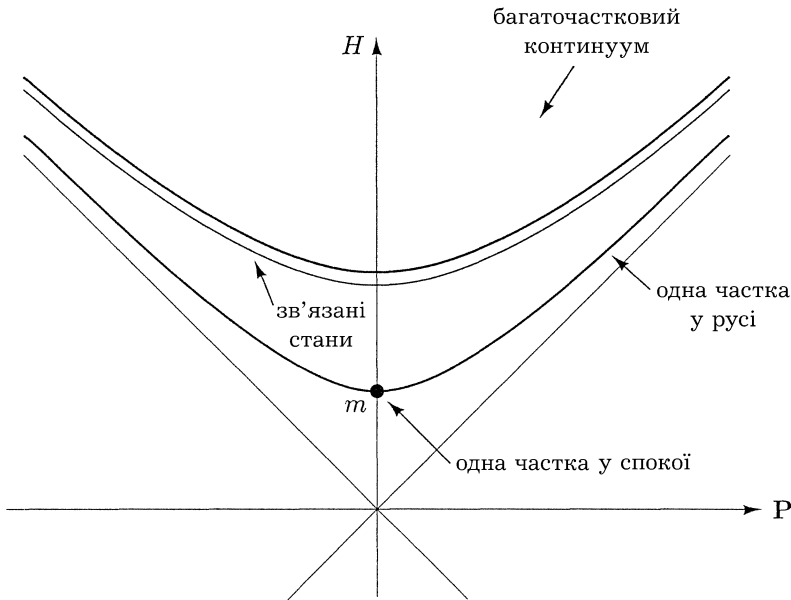
#### § 7.1. Перенормування напруженості поля

У цьому параграфі ми досліджуватимемо аналітичну структуру двоточкової кореляційної функції,

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \quad \text{або} \quad \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle.$$

<sup>35</sup>Ще ми постулювали, а не вивели, вираз для фотонного пропагатора. Це буде виправлено в Розділі 9 (Том II).

У вільній теорії поля двоточкова функція  $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$  має просту інтерпретацію. Вона є амплітудою ймовірності того, що частка розповсюджується з точки  $y$  в точку  $x$ . У якій мірі така інтерпретація є справедливою в теорії із взаємодією?



**Рис. 7.1.** Власні значення оператора 4-імпульсу  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$  покривають поверхні послідовності гіперболоїдів у імпульсно-енергетичному просторі. В типовій теорії стан описує одну або більше часток з масою  $m$ . Таким чином маємо гіперболоїд одночасткових станів і нескінченний набір гіперболоїдів двочасткових, тричасткових і т. д. станів. Крім того, нижче порогу утворення двох вільних часток може бути один або більше гіперболоїдів, що відповідають зв'язаним станам.

Наш аналіз двоточної функції спиратиметься лише на загальні принципи теорії відносності та квантової механіки і не залежатиме від природи взаємодії чи від розкладення в пертурбативний ряд. Проте для простоти ми обмежимося скалярними полями. Схожі результати можна отримати і для кореляційних функцій полів зі спіном. Наприкінці за приклад ми наведемо відповідний результат для діракового поля.

Розіб'ємо двоточкову функцію  $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ , для чого вставимо в неї між  $\phi(x)$  та  $\phi(y)$  тотожний оператор у вигляді суми за повним набором станів. За такі оберемо власні стани повного гамільтоніана із взаємодією  $H$ . Оскільки оператор імпульсу  $\mathbf{P}$  комутує з  $H$ , ці стани можна обрати так, щоб вони були власними станами  $\mathbf{P}$ . Твердження можна посилити, якщо враху-

вати лоренц-інваріантність. Нехай  $|\lambda_0\rangle$  є власним станом  $H$  з нульовим імпульсом:  $\mathbf{P}|\lambda_0\rangle = 0$ . Тоді всі бусты  $|\lambda_0\rangle$  також є власними станами  $H$  і пробігають усі можливі значення 3-імпульсу. І навпаки — будь-який власний стан  $H$  з певним імпульсом можна записати у вигляді бусту стану з нульовим імпульсом  $|\lambda_0\rangle$ . Власні значення оператора 4-імпульсу  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$  лежать на гіперболоїдах, як зображено на Рис. 7.1.

Згадаймо з Розділу 2, що співвідношення повноти для одночасткових станів є

$$\mathcal{I}_{14} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| \quad (7.1)$$

Ми можемо написати аналогічне співвідношення повноти для всього гільбертового простору, лише трохи змінивши позначення. Нехай  $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$  є бустом  $|\lambda_0\rangle$  з імпульсом  $\mathbf{p}$ . Припустимо, що стан  $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ , подібно до одночасткових станів  $|\mathbf{p}\rangle$ , нормовано релятивістськи інваріантним чином. Встановимо  $E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_\lambda^2}$ , де  $m_\lambda$  — „маса“ стану  $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ , тобто енергія стану  $|\lambda_0\rangle$ . Потрібне нам співвідношення повноти має вигляд

$$\mathbf{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|, \quad (7.2)$$

де сума береться за всіма станами з нульовим імпульсом  $|\lambda_0\rangle$ .

Тепер вставимо це розкладення між операторами у двоточковій функції. Вважатимемо, що  $x^0 > y^0$ , і знехтуємо постійним внеском  $\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle$ , що не становить для нас інтересу.<sup>36</sup> Двоточкова функція є

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|\phi(y)|\Omega\rangle. \quad (7.3)$$

Ми можемо провести маніпуляції з матричними елементами:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle &= \langle\Omega| e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\phi(0) e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle = \\ &= \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \\ &= \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Остання рівність є наслідком лоренц-інваріантності  $\langle\Omega|\phi(0)$ . Щоб переконатися в цьому, треба вставити два множники  $U^{-1}U$ , де  $U$  є унітарним оператором бусту від  $\mathbf{p}$  до 0, і скористатися рівністю  $U\phi(0)U^{-1} = \phi(0)$ .<sup>37</sup> Після

<sup>36</sup>Зазвичай він є нульовим внаслідок симетрії. А для полів з вищими спінами він дорівнює нулю в силу лоренц-інваріантності.

<sup>37</sup>Для полів зі спіном слід враховувати їх нетривіальне перетворення Лоренца.

введення інтеграла по  $p^0$  вираз для двоточної функції (як і досі,  $x^0 > y^0$ ) стає

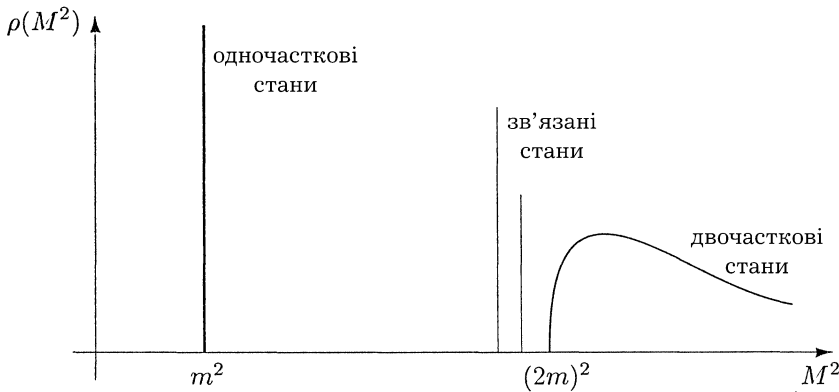
$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (7.5)$$

Звернімо увагу на появу пропагатора  $D_F(x-y)$  з заміною  $m$  на  $m_{\lambda}$ . Для  $y^0 > x^0$  справедливі аналогічні вирази, тому обидва випадки можна об'єднати. Узагальнений вираз такого розкладення для двоточної функції має назву *спектрального представлення Челлена–Лемана*:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y; M^2), \quad (7.6)$$

де  $\rho(M^2)$  є позитивно визначена функція *спектральної густини*:

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (7.7)$$



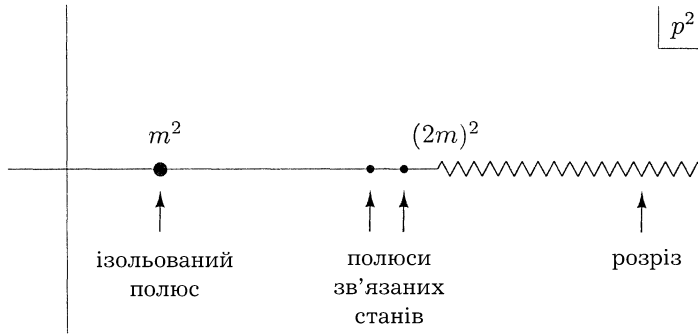
**Рис. 7.2.** Спектральна функція  $\rho(M^2)$  для типової теорії поля із взаємодією. Одночасткові стани роблять внесок з дельта-функцій при  $m^2$  (квадрат маси частки). Багаточасткові стани дають безперервний спектр, що починається при  $(2m)^2$ . Також можуть бути внески від зв'язаних станів.

Спектральна густина  $\rho(M^2)$  для типової теорії поля показана на Рис. 7.2. Зазначимо, що одночасткові стани роблять у неї внесок у вигляді ізольованих дельта-функцій:

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + (\text{нічого іншого до } M^2 \simeq (2m)^2), \quad (7.8)$$



де  $Z$  — деяке число, що визначається квадратом матричного елемента в (7.7). Називатимемо  $Z$  *константою перенормування напруженості поля*. Величина  $m$  є точна маса однієї частки або точне власне значення енергії частки у спокої. Загалом, ця величина відрізняється від тієї, що фігурує в лагранжіані і яку ми надалі позначатимемо  $m_0$ , називаючи її *голою масою*. Величина ж  $m$  є *фізичною масою*  $\phi$ -бозона. Безпосередньо спостережною є лише фізична маса  $m$ .



**Рис. 7.3.** Аналітична структура фур'є-перетворення двоточної функції типової теорії в комплексній  $p^2$ -площині. Одночасткові стани дають внесок у вигляді ізолюваних полюсів у точках, що відповідають масам часток. Стани двох і більше часток дають розріз, а зв'язані стани — додаткові полюси.

Спектральне розкладення (7.6) дає такий вигляд фур'є-перетворення двоточної функції:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Аналітична структура цієї функції в комплексній  $p^2$ -площині показана на Рис. 7.3. Перший доданок відповідає простому ізолюваному полюсові при  $p^2 = m^2$ , а другий — розрізу, що починається в точці  $p^2 = (2m)^2$ . Якщо існують будь-які двочасткові зв'язані стани, то в  $\rho(M^2)$  з'являться додаткові дельта-функції, а в комплексній площині — нові полюси.

У § 2.4 ми знайшли точний вираз для двоточної кореляційної функції для вільного скалярного поля:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.10)$$

При  $x^0 > 0$  ми інтерпретували цю формулу, як амплітуду ймовірності того, що частка розповсюджується від 0 до  $x$ . З рівняння (7.9) видно, що двоточкова функція має схожий вигляд в узагальненій теорії із взаємодією. Загальний вираз є просто сумою скалярних амплітуд розповсюдження станів, народжених з вакууму під дією оператора  $\phi(0)$ . Проте між (7.9) і (7.10) існує дві відмінності. Перша полягає в тому, що (7.9) містить константу перенормування напруженості поля  $Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2$ , яка є ймовірністю того, що  $\phi(0)$  утворить даний стан з вакууму. У (7.10) цей множник присутній неявно, оскільки для вільної теорії  $\langle p | \phi(0) | 0 \rangle = 1$ . Друга відмінність викликана наявністю в (7.9) внесків від багаточасткових проміжних станів з безперервним спектром мас. У вільній теорії оператор  $\phi(0)$  може утворити з вакууму лише одночастковий стан. З урахуванням цих двох відмінностей (7.9) є безпосереднім узагальненням (7.10).

При подальшому аналізі буде істотним, що внески в (7.9) від одночасткових і багаточасткових проміжних станів можна розрізняти по силі відповідних їм сингулярностей. Полюси у площині  $p^2$  виникають винятково через одночасткові стани, а багаточастковим відповідають розрізи — слабші сингулярності. У наступному параграфі ми побачимо, як ця доволі формальна обставина поширюється на випадок багатоточкових кореляційних функцій і відіграє вирішальну роль при виведенні діаграмної формули для елементів  $S$ -матриці.

Проведений у цьому параграфі аналіз безпосередньо узагальнюється для двоточкових функцій полів з ненульовим спіном. Найбільше ускладнення виникає при адаптації (7.4), оскільки тепер поле нетривіально перетворюється під дією бустів. Власне, щоб описати багаточасткові стани, потрібно кілька інваріантних спектральних функцій. Проте це жодним чином не впливає на остаточний висновок, що полюси у площині  $p^2$  можуть з'явитися лише від внеску одночасткових станів, утворених оператором поля. До прикладу, двоточкова функція діракових полів має структуру:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle &= \frac{iZ_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \\ &= \frac{iZ_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots, \end{aligned} \quad (7.11)$$

де подальші члени дають розріз, що відповідає багаточастковим станам. Як і для скалярного поля, константа  $Z_2$  є ймовірністю того, що оператор квантового поля утворить або знищить одночастковий власний стан  $H$ :

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p). \quad (7.12)$$

(Для античастки слід замінити  $v$  на  $\bar{v}$ .) Таким чином, діракова двоточкова

функція з точністю до масштабного множника  $Z_2$  збігається з відповідною функцією для вільного діракового поля з фізичною масою.

### Приклад: власна енергія електрона

Такий непертурбативний аналіз двоточної кореляційної функції радикально відрізняється від уже звичного нам безпосереднього вивчення фейнманових діаграм. Одержавши висновок про сингулярну структуру функції в найзагальнішому вигляді, ми маємо всі підстави сподіватися, що її буде виявлено і при обчисленні діаграм. У решті цього параграфу ми безпосередньо перевіримо це на прикладі двоточної електронної функції в КЕД.

Ця функція є сумою діаграм

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots \quad (7.13)$$

Відповідно до фейнманових правил для кореляційних функцій, кожна з цих діаграм містить множник  $e^{-ip \cdot (x-y)}$  для двох зовнішніх точок та інтегрування  $\int (d^4p / (2\pi)^4)$  по імпульсу  $p$ , що переноситься початковим та кінцевим пропагаторами. До кінця поточного параграфу ми відкидатимемо ці множники — інакше кажучи, кожна діаграма позначатиме відповідний член у фур'є-перетворенні двоточної функції.

Перша з них є просто пропагатором вільного поля:

$$\text{diagram 1} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (7.14)$$

При обчисленнях позначатимемо масу в електронному пропагаторі через  $m_0$ , щоб явно підкреслити встановлений вище факт, що маса, яка фігурує в лагранжіані, відрізняється від спостережної енергії спокою частки. Проте, якщо справедлива теорія збурень, вираз для пропагатора в головному порядку має апроксимувати точний вираз. І справді, функція (7.14) має при  $p^2 = m_0^2$  полюс вигляду (7.11). Тому природно сподіватися, що остаточний вираз для двоточної функції має полюс такого ж вигляду, але його розташування трохи зсунуте:  $m^2 = m_0^2 + O(\alpha)$ .

Друга діаграма в (7.13), що має назву *власної енергії електрона*, складніша:

$$\text{diagram 2} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} [-i\Sigma_2(p)] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2}, \quad (7.15)$$

де

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (7.16)$$

(Позначення  $\Sigma_2$  вказує, що це внесок другого порядку за  $e$  у величину  $\Sigma$ , яку ми визначимо нижче.) Інтеграл  $\Sigma_2$  має інфрачервону розбіжність, яку можна регуляризувати шляхом запровадження малої маси фотона  $\mu$ . Крім цього інтеграла, діаграма, вочевидь, має подвійний полюс при  $p^2 = m^2$ . Загалом, уся поправка виглядає не надто приємно. Проте спробуємо обчислити  $\Sigma_2(p)$ , застосувавши техніку, розроблену при обчисленні вершинної поправки в § 6.3.

Насамперед введемо фейнманів параметр і об'єднаємо два знаменники в один:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} &= \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\varepsilon]^2}. \end{aligned}$$

Потім виокремимо повний квадрат і здійснимо заміну  $\ell \equiv k - xp$ . Відкинувши в чисельнику лінійний за  $\ell$  доданок, маємо

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x\not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^2}, \quad (7.17)$$

де  $\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2$ . Інтеграл по  $\ell$  розбігається, тому спершу регуляризуємо його за процедурою Паулі-Віларса (6.51):

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}.$$

Другий доданок дає вираз аналогічний (7.17), лише з заміною  $\mu$  на  $\Lambda$ . Як і в § 6.3, здійснимо віків поворот і перейдемо до евклідової змінної  $\ell_E^0 = -i\ell^0$ . В кінцевому підсумку,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^2} &\rightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left( \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 - \Delta]^2} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 - \Delta_\Lambda]^2} \right) = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right), \end{aligned} \quad (7.18)$$

де

$$\Delta = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x\Lambda^2$$

Остаточний результат:

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x\mu) \log \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2} \right). \quad (7.19)$$

Перед розглядом розбіжностей у цьому виразі вивчимо його аналітичну поведінку, як функції  $p^2$ . Логарифм у (7.19) має розріз у комплексній площині, коли його аргумент від'ємний. Для будь-якого фіксованого  $x$  це має місце при досить великих  $p^2$ . А точніше, розріз починається там, де

$$(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $x$ , одержимо

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{(p^2 + m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^4} - \frac{m_0^2}{p^2}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Розріз функції  $\Sigma_2(p^2)$  починається при мінімальному значенні  $p^2$ , за якого в цього рівняння є дійсні рішення для  $x$  на відріжку між 0 і 1. Це відбувається при  $p^2 = (m_0 + \mu)^2$ , тобто, коли досягнуто порогу народження двочасткового (електрон і фотон) стану. Насправді неважко показати, що квадратний корінь у (7.20), переписаний у вигляді

$$k = \frac{1}{2\sqrt{q^2}} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]},$$

є імпульсом у системі центру мас двох часток з масами  $m_0$  і  $\mu$  та енергією  $\sqrt{q^2}$ . Зрозуміло, що цей імпульс стає дійсним за порогом народження двочасткового стану. Розріз розташовано в цілковитій відповідності з формулою Челлена–Лемана.<sup>38</sup>

Ми визначили розташування двочасткового розрізу, передбаченого формулою Челлена–Лемана, але ще не знайшли простого полюсу в точці

<sup>38</sup>У реальній КЕД  $\mu = 0$ , і розріз збігається з одностатковим полюсом. Ця обставина відіграє роль при детальному дослідженні інфрачервоних розбіжностей, але її розгляд виходить за межі нашого аналізу.



Точний пропагатор має простий полюс, зсунутий від точки  $m_0$  на величину  $\Sigma(p)$ .

Розташування цього полюсу є фізичною масою  $m$  і визначається рішенням рівняння

$$[p - m_0 - \Sigma(p)]_{p=m} = 0. \quad (7.24)$$

Якщо  $\Sigma(p)$  визначена умовою (7.21), то позитивний внесок у  $\Sigma$  забезпечує збільшення маси електрона. Поблизу полюсу знаменник (7.23) має вигляд

$$(p - m) \cdot \left( 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \right) + \mathcal{O}((p - m)^2). \quad (7.25)$$

Таким чином, точний електронний пропагатор має одночастковий полюс вигляду (7.11), де  $m$  визначається з (7.24), а

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{dp} \Big|_{p=m} \quad (7.26)$$

Явне обчислення  $\Sigma_2$  дозволяє знайти перші поправки до  $m$  і  $Z_2$ . Почнемо  $m$ . У першому порядку за  $\alpha$  зсув маси є

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma_2(p = m) \approx \Sigma_2(p = m_0). \quad (7.27)$$

А отже, застосувавши (7.19),

$$\delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2 - x) \log \left( \frac{x\Lambda^2}{(1 - x)^2 m_0^2 + x\mu^2} \right). \quad (7.28)$$

Зсув маси містить ультрафіолетову розбіжність. Розбіжний член має вигляд

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3}{4\pi} m_0 \log \left( \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right). \quad (7.29)$$

Чи є насправді проблемою розбіжна величина в різниці між  $m$  і  $m_0$ ? Це питання має два рівні, концептуальний та практичний.

На концептуальному рівні слід очікувати, що маса електрона буде змінюватися за рахунок взаємодії з електромагнітним полем. У класичній електродинаміці до енергії спокою будь-якої зарядженої частки додається енергія електростатичного поля, яке вона утворює. Якщо частка точкова, цей внесок є розбіжним:

$$\int d^3r \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 = \int d^3r \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4\pi r} \right)^2 = \frac{\alpha}{2} \int \frac{dr}{r^2} \sim \alpha\Lambda. \quad (7.30)$$

Насправді не зовсім зрозуміло, чому розбіжність у (7.29) така слабка — логарифмічна за  $\Lambda$  замість лінійної, як у (7.30). Для з'ясування причини розглянемо межу  $m_0 \rightarrow 0$ . Тоді в гамільтоніані КЕД два спіральні компоненти електронного поля  $\psi_L$  і  $\psi_R$  не взаємодіятимуть між собою. Звідси випливає, що поправки теорії збурень жодним чином не можуть призвести ні до взаємодії  $\psi_L$  з  $\psi_R$ , ні, зокрема, до появи масового члена. Інакше кажучи,  $\delta m$  має обернутися на нуль при  $m_0 = 0$ . Отже, зсув маси має бути пропорційним  $m_0$ , і з міркувань розмірності ясно, що залежність від  $\Lambda$  може бути лише логарифмічною за  $\Lambda$ .

На практичному рівні, поява нескінченостей не викликає довіри до наших пертурбативних обчислень. Наприклад, усі теоретичні результати Розділу 5 містять  $m_0$ , а не  $m$ . Для порівняння теорії з експериментом слід замінити  $m_0$  на  $m$  зі співвідношення  $m_0 = m + \mathcal{O}(\alpha)$ . А оскільки „мала“ поправка  $\mathcal{O}(\alpha)$  насправді нескінченна, то обґрунтованість процедури викликає серйозні сумніви. Придатність теорії була б очевиднішою, якби при обчисленні фейнманових діаграм ми користувалися замість  $\frac{i}{(\not{p} - m_0)}$  пропагатором  $\frac{i}{(\not{p} - m)}$ , полюс якого розташовано правильно. У Розділі 10 ми покажемо, як перегрупувати пертурбативний ряд, щоб  $m_0$  замінилася на  $m$ , і пропагатор у нульовому порядку мав би полюс, що відповідає фізичній масі. А надалі в цьому розділі ми просто будемо замінювати  $m_0$  на  $m$  у поправках  $\mathcal{O}(\alpha)$ .

Нарешті, знайдемо поправку до  $Z_2$ . З (7.26) маємо, що поправка порядку  $\alpha$  до  $\delta Z_2 = (Z_2 - 1) \epsilon$

$$\begin{aligned} \delta Z_2 &= \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x \log \frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} + \frac{2x(2-x)(1-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Цей вираз, знов-таки, логарифмічно розбігається в ультрафіолетовій межі. Спостережність розбіжного члена ми обговоримо наприкінці § 7.2, проте вже зараз звернімо увагу на ту цікаву обставину, що (7.31) на вигляд дуже схожа на взятий майже навмання доданок, який ми використали для фікса-



ції форм-фактора в § 6.3. Відповідно до (6.56), цей доданок є

$$\begin{aligned}\delta F_1(0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ &\quad \times \left[ \log \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \left[ \log \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right].\end{aligned}\quad (7.32)$$

Інтегруючи по частинах, маємо

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz (1-2z) \log \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} &= - \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2(1-z)m^2 - \mu^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} = \\ &= - \int_0^1 dz \left[ (1-z) - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right].\end{aligned}$$

Неважко показати, що  $\delta F_1(0) + \delta Z_2 = 0$ . Ця тотожність відіграє вирішальну роль при обґрунтуванні *ad hoc* процедури (6.55).

## § 7.2. Редукційна формула ЛСЦ

У попередньому параграфі ми бачили, що фур'є-перетворення двоточної кореляційної функції, представленої як аналітична функція від  $p^2$ , має простий полюс, що відповідає масі одночасткового стану:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (7.33)$$

(Тут і далі символ  $\sim$  означатиме, що обидві частини мають однакові полюси. Існують і додаткові скінченні члени, які в даному випадку визначаються виразом (7.9).) У поточному параграфі ми узагальнимо цей результат для кореляційних функцій вищого порядку. Ми виведемо формулу, що пов'язує кореляційні функції та елементи  $S$ -матриці. Це формула була вперше отримана Леманом, Симанзіком та Цімерманом і одержала назву *редукційної формули ЛСЦ*.<sup>39</sup> Цей результат, разом з фейнмановими правилами обчислення кореляційних функцій, дозволить обґрунтувати основну формулу

<sup>39</sup>Н. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* 1, 1425 (1955).

(4.103), для елементів  $S$ -матриці через фейнманові діаграми. З міркувань простоти проведемо всі викладки для скалярних полів.

Стратегія виведення формули така. Для обчислення елемента  $S$ -матриці для процесу  $2 \text{ частки} \rightarrow n \text{ часток}$ , почнемо з кореляційної функції  $n + 2$  гайзенбергових полів. Здійснивши фур'є-перетворення за координатою будь-якого з цих полів, одержимо полюс типу (7.33) у площині фур'є-перетворення  $p^2$ . Ми покажемо, що одночасткові стани, які відповідають цим полюсам, насправді є асимптотичними станами, що з'являються в наближенні добре локалізованих хвильових пакетів з визначеними імпульсами. Перейшовши до межі, коли всі  $n + 2$  частки перебувають на масовій поверхні, можна вважати коефіцієнт при багатократному полюсі елементом  $S$ -матриці.

Передовсім, проведемо фур'є-перетворення  $(n + 2)$ -точкової кореляційної функції за одним аргументом  $x$ . Треба проаналізувати інтеграл

$$\int d^4x \, e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \phi(z_2) \cdots \} | \Omega \rangle.$$

Було б бажано виокремити полюси за змінною  $p^0$ . Для цього розіб'ємо інтеграл по  $x^0$  на три інтервали:

$$\int dx^0 = \int_{\tau_+}^{\infty} dx^0 + \int_{\tau_-}^{\tau_+} dx^0 + \int_{-\infty}^{\tau_-} dx^0, \quad (7.34)$$

де  $\tau_+$  набагато більша, а  $\tau_-$  набагато менша, ніж усі  $z_i^0$ . Назвемо ці інтервали I, II і III. Позаяк інтервал II є обмеженим і підінтегральний вираз залежить від  $p^0$  через аналітичну функцію  $\exp(ip^0 x^0)$ , внесок від цього інтервалу також буде аналітичним за змінною  $p^0$ . Інтервали ж I і III є необмеженими і можуть містити сингулярності за  $p^0$ .

Спершу розглянемо інтервал I. Тут  $x^0$  — найпізніший момент часу, і  $\phi(0)$  стоїть першим у хронологічному добутку. Вставимо повний набір проміжних станів у вигляді (7.2):

$$1 = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{q}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}}|.$$

Таким чином, інтеграл по інтервалу I є

$$\begin{aligned} \int_{\tau_+}^{\infty} dx^0 \int d^3 \mathbf{x} \, e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} \times \\ \times \langle \Omega | \phi(x) |\lambda_{\mathbf{q}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}} | T \{ \phi(z_1) \phi(z_2) \cdots \} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Використавши (7.4),

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_q \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-iq \cdot x} \Big|_{q^0 = E_q(\lambda)},$$

і вставивши множник  $e^{-\varepsilon x^0}$ , щоб інтеграл був добре визначеним, отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \int_{\tau_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q(\lambda)} e^{ip^0 x^0} e^{-iq^0 x^0} e^{-\varepsilon x^0} \times \\ & \quad \times \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \langle \lambda_q | T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\dots\} | \Omega \rangle = \\ & = \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_q(\lambda)} \frac{i e^{i(p^0 - E_p + i\varepsilon)\tau_+}}{p^0 - E_p(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_q | T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\dots\} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Знаменник цього виразу такий самий, як і в (7.5):  $p^2 - m_\lambda^2$ . Отже, має місце аналітична сингулярність за змінною  $p^0$ . Як і в § 7.1, вона може бути полюсом або розрізом, залежно від того, чи ізольована енергія спокою  $m_\lambda$ . Одночастковий стан відповідає ізольованому значенню енергії  $p^0 = E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 - m^2}$ , і в цій точці (7.36) має полюс:

$$\begin{aligned} & \int d^4 x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(z_1)\dots\} | \Omega \rangle \underset{p^0 \rightarrow +E_p}{\sim} \\ & \underset{p^0 \rightarrow +E_p}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | T\{\phi(z_1)\dots\} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Множник  $\sqrt{Z}$  є та сама константа перенормування напруженості поля, що присутня в (7.8), оскільки вона замінює такий самий матричний елемент, як у (7.7).

Для обчислення внеску від III, поставимо оператор  $\phi(x)$  останнім у хронологічному добутку і вставимо повний набір станів між  $T\{\phi(z_1)\dots\}$  і  $\phi(x)$ . Повторивши викладки, бачимо, що при  $p^0 \rightarrow -E_p$  знову має місце полюс:

$$\begin{aligned} & \int d^4 x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(z_1)\dots\} | \Omega \rangle \underset{p^0 \rightarrow -E_p}{\sim} \\ & \underset{p^0 \rightarrow -E_p}{\sim} \langle \Omega | T\{\phi(z_1)\dots\} | -\mathbf{p} \rangle \sqrt{Z} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Тепер здійснимо фур'є-перетворення відносно до решти координат полів. Проте, щоб уникнути інтерференції між зовнішніми частками, треба ізольовати їх одна від одної у просторі. Для цього повторимо попередні обчислення, використавши не звичайне фур'є-перетворення, а хвильовий пакет. У (7.35) зробимо заміну

$$\int d^4 x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \rightarrow \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d^4 x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{k}), \quad (7.39)$$

де  $\phi(\mathbf{k})$  — деякий вузький розподіл, локалізований поблизу  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ . Завдяки йому  $x$  буде обмежено ділянкою з характерним розміром хвильового пакета, яка оточуватиме траєкторію частки з імпульсом  $\mathbf{p}$ . З урахуванням цієї зміни права частина (7.36) має складнішу сингулярну структуру:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k})}{2E_{\mathbf{k}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\mathbf{k}}(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_{\mathbf{k}} | T\{\phi(z_1) \cdots\} | \Omega \rangle \underset{p^0 \rightarrow +E_{\mathbf{p}}}{\sim} \\ \underset{p^0 \rightarrow +E_{\mathbf{p}}}{\sim} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}) \frac{i}{\tilde{p}^0 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{k} | T\{\phi(z_1) \cdots\} | \Omega \rangle. \quad (7.40)$$

де в другому рядку  $\tilde{p} = (p^0, \mathbf{p})$ . Тепер одночасткова сингулярність перетворилася на розріз, довжина якого має порядок ширини хвильового пакета  $\phi(\mathbf{k})$  в імпульсному просторі. Проте, якщо  $\phi(\mathbf{k})$  є дуже вузький, розріз також дуже короткий, тоді (7.40) має добре визначену межу при  $\phi(\mathbf{k}) \rightarrow (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ , і сингулярність (7.40) прагне к полюсу (7.36). Сингулярність (7.38), пов'язана з одночастковими станами в далекому минулому, змінюється таким самим чином.

Далі розглянемо інтегрування по кожній координаті полів  $(n + 2)$ -точкової кореляційної функції з відповідною вагою хвильового пакета:<sup>40</sup>

$$\left( \prod_i \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \phi_i(\mathbf{k}_i) \right) \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2) \cdots\} | \Omega \rangle. \quad (7.41)$$

Хвильові пакети оберемо так, щоб вони перекривалися поблизу  $x = 0$  і розділялися в далекому минулому та в далекому майбутньому. Для аналізу інтеграла оберемо велике позитивне значення часу  $\tau_+$ , щоб усі хвильові пакети були відокремлені один від одного при  $x > \tau_+$ , а також велике негативне значення часу  $\tau_-$ , щоб вони були розділені при  $x_i^0 < \tau_-$ . Відтак кожен з інтегралів по  $x_i^0$  розіб'ємо на три інтервали, як зробили це в (7.34). Будь-який з інтегралів по  $x_i^0$  на інтервалі  $\Pi$  є аналітичним за значенням відповідної енергії  $p_i^0$ , тому знову треба зосередитися на інтервалах, де всі  $x_i^0$  лежать у далекому минулому або майбутньому.

Для визначеності розглянемо випадок, коли лише дві координати,  $x_1^0$  та  $x_2^0$ , лежать у майбутньому. Тоді поля  $\phi(x_1)$  і  $\phi(x_2)$  у хронологічному добутку стоятимуть зліва від решти. Вставивши повний набір станів  $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ , знайдемо, що інтеграли по координатах у (7.41) набувають вигляду

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \left( \prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \phi_i(\mathbf{k}_i) \right) \times \\ \times \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} | \lambda_{\mathbf{K}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{K}} | T\{\phi(x_3) \cdots\} | \Omega \rangle.$$

<sup>40</sup> Як і в § 4.5, знак добутку відноситься як до інтегрувань, так і до множників у дужках. Інтегрування по  $x_i$  стосується всього виразу цілком.

Стан  $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$  знищується двома польовими операторами. Отже, він має складатися з двох різних збуджень вакууму, що перебувають у різних точках. Якщо ці збудження досить віддалені одне від одного, вони є незалежними, тому можна наближено записати

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} | \lambda_{\mathbf{K}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{K}} | = \\ = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_1}} \int \frac{d^3 \mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_2}} \times \\ \times \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{\mathbf{q}_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{\mathbf{q}_2} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}_1} \lambda_{\mathbf{q}_2} |. \end{aligned}$$

Сума за  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  в цьому виразі проводиться за всіма станами з нульовим імпульсом, але внесок у потрібні нам полюси дають лише одночасткові стани. Інтеграли по  $x_1^0$  і  $\mathbf{q}_1$  призводять до сингулярності за змінною  $p_1^0$  типу (7.40), а інтеграли по  $x_2^0$  і  $\mathbf{q}_2$  — до аналітичної сингулярності за  $p_2^0$ . Член у (7.41), що містить обидві сингулярності, має вигляд

$$\left( \prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \phi_i(\mathbf{k}_i) \frac{i}{\tilde{p}_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T\{\phi(x_3) \cdots\} | \Omega \rangle.$$

У межі, коли хвильові пакети перетворюються на дельта-функції, локалізовані на визначених імпульсах  $\mathbf{p}_1$  і  $\mathbf{p}_2$ , цей вираз переходить у

$$\left( \prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right)_{\text{out}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T\{\phi(x_3) \cdots\} | \Omega \rangle.$$

Стан  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |$  є достоту асимптотичний кінцевий *out-стан* (див. § 4.5), оскільки він є межею з добре визначеними імпульсами, одержаними зі стану, утвореного добре розділеними хвильовими пакетами. Застосування аналогічних міркувань до часів  $x_i^0$ , що відповідають далекому минулому, засвідчує, що коефіцієнт при найсингулярнішому члені, що відповідає  $p_i^0$ , є матричним елементом між вакуумом та асимптотичним початковим *in-станом*. Таким чином, найсингулярніший член у (7.41) має вигляд

$$\left( \prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \left( \prod_{i=3,\dots} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \sqrt{Z} \right)_{\text{out}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | - \mathbf{p}_3 \cdots \rangle_{\text{in}}.$$

Останній множник якраз і є елементом  $S$ -матриці.

Отже, ми показали, що можемо одержати елемент  $S$ -матриці, розглядаючи відповідне вакуумне середнє за хвильовими пакетами полів шляхом

виокремлення головних сингулярностей за енергіями  $p_i^0$  і наступного переходу до межі, в якій ці пакети обертаються на дельта-функції від імпульсів. Проте обчислення можна спростити, провівши його в зворотному порядку — спершу перейти від хвильових пакетів до дельта-функцій, повернувшись до звичайного фур'є перетворення, а вже потім виокремити сингулярність. Остаточний результат для головної сингулярності не залежатиме від порядку виконання цих операцій, хоча доведення цього факту є досить тонкою справою. А схематично можна пояснити, що нові сингулярності можуть виникнути за умови, якщо  $x_1$  та  $x_2$  у фур'є-перетворенні стають у далекому майбутньому близькими одне до одного. Однак у цьому асимптотичному регіоні експонента набуває вигляду  $\exp[i(p_1 + p_2) \cdot x_1]$ , тому нові сингулярності мають бути простими полюсами у площині  $(p_1 + p_2)$ , а не добутком полюсів по  $p_1^0$  і  $p_2^0$  окремо. Строгіше пояснення (на жаль, викладене в зовсім інших математичних термінах) можна знайти в оригінальній роботі Лемана, Симанзіка й Цімермана.

Взявши до уваги можливість зміни порядку операцій, ми можемо знайти точне співвідношення між фур'є-перетвореннями кореляційних функцій та елементами S-матриці. Це і є редукційна формула Лемана – Симанзіка – Цімермана (ЛСЦ):

$$\prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \} | 0 \rangle \sim$$

$$\underset{\substack{\text{кожен } p_i^0 \rightarrow +E_{p_i} \\ \text{кожен } q_j^0 \rightarrow +E_{q_j}}}{\sim} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z} i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left( \prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z} i}{k_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_m \rangle.$$

(7.42)

Величина  $Z$ , що з'явилась у цьому виразі, точно збігається з константою перенормування напруженості поля, яку ми визначили в § 7.1, як лишок в одночастковому полюсі двоточної функції полів. Кожній частці відповідає свій фактор  $Z$ , що отримується з відповідної двоточної функції. Для полів з вищими спінами кожен множник  $\sqrt{Z}$  входить разом з поляризаційними множниками типу  $u^s(p)$ , як у (7.12). У другому рядку (7.42) треба взяти суму за поляризаціями  $s$ .

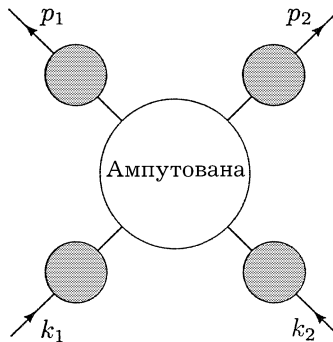
Формула ЛСЦ дає такий рецепт знаходження елемента S-матриці. Треба обчислити фур'є-перетворення відповідної кореляційної функції, розглянути ділянку в імпульсному просторі, де імпульси зовнішніх часток лежать поблизу масової поверхні, і знайти коефіцієнт при багаточастковому полюсі. Для полів зі спіном ще слід помножити на поляризаційний спінор  $u^s(p)$  (для ферміонів) або вектор  $\varepsilon^r(k)$  (для бозонів), щоб спроектувати на потрібний спіновий стан.

Наша наступна задача полягає в тому, щоб описати цю процедуру мовою фейнманових діаграм. Аналізуватимемо зв'язок між діаграмними розкладеннями чотириточкової функції скалярного поля та елементом  $S$ -матриці процесу  $2 \text{ частки} \rightarrow 2 \text{ частки}$ . Розглядатимемо лише цілком зв'язні діаграми, що дають внесок у корелятор. Легко показати, що незв'язними діаграмами можна знехтувати, бо вони не мають сингулярної структури у вигляді добутку чотирьох полюсів, як у (7.42).

Точна чотириточкова функція

$$\left( \prod_{i=1}^2 \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \right) \left( \prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j e^{ik_j \cdot y_j} \right) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) | 0 \rangle.$$

має загальну структуру, зображену на Рис. 7.4. На ній явно показані діаграмні поправки до кожної зовнішньої лінії. Коло в центрі представляє суму всіх ампутуваних чотириточкових діаграм.



**Рис. 7.4.** Структура чотириточкової кореляційної функції у скалярній теорії поля.

Ми можемо підсумувати поправки до кожної зовнішньої лінії так само, як це робили при знаходженні точного електронного пропагатора в попередньому параграфі. Нехай  $-iM^2(p^2)$  позначає суму одностаточно непривідних (1ЧН) вставлень у пропагатор скалярного поля:

$$-iM^2(p^2) = \text{loop} + \text{self-energy} + \text{tadpole} = \text{1ЧН}$$

Отже, точний пропагатор можна записати у вигляді геометричної прогресії

і взяти його суму, як у (7.23):

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots = \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-iM^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}.
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

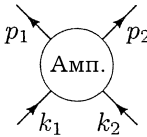
Зазначимо, що як і у випадку електронного пропагатора, з домовленості про знаки при  $M^2(p^2)$  випливає, що позитивний внесок у  $M^2(p^2)$  відповідає збільшенню фізичної маси скалярної частки. Розклавши кожен підсумований пропагатор поблизу фізичного полюсу, ми можемо побачити, що кожна зовнішня лінія чотириточкової амплітуди дає внесок

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{регулярна частина}). \tag{7.44}$$

Таким чином, сума діаграм містить добуток чотирьох полюсів:

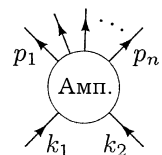
$$\frac{iZ}{p_1^2 - m^2} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2} \frac{iZ}{k_1^2 - m^2} \frac{iZ}{k_2^2 - m^2}.$$

Це така сама сингулярність, як і в другому рядку (7.42). Порівнюючи коефіцієнти при добутках полюсів, одержимо співвідношення

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^4 \text{Амп.}$$


де коло позначає суму ампутуваних чотириточкових діаграм, а  $Z$  — константу перенормування напруженості поля.

Такі ж міркування можна застосувати і до фур'є-перетворення  $(n + 2)$ -точкового корелятора довільної теорії поля. Загальне співвідношення між елементами  $S$ -матриці та фейнмановими діаграмами є таким:

$$\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2} \text{Амп.} \tag{7.45}$$


(Якщо зовнішні частки належать до різних типів, то кожному з них відповідає свій множник  $\sqrt{Z}$ . А якщо частки мають ненульовий спин, до правої



частини треба додавати поляризаційні множники на зразок  $u^s(k)$ .) Це майже та сама діаграмна формула для  $S$ -матриці, що була постульована в § 4.6. Єдина її нова особливість полягає в появі константи перенормування  $\sqrt{Z}$ . Такі константи неістотні при розрахунках у головному порядку теорії збурень, але стають важливими при обчисленні вищих поправок.

Досі ми провели повне обчислення лише однієї вищої поправки — а саме, поправки порядку  $\alpha$  до форм-факторів електрона. Вплив перенормування електронного поля не брався до уваги. Тепер ми врахуємо цей множник і подивимося, як він впливає на результат.

Оскільки вирази (6.28) і (6.30) для розсіяння електрона на важкій мішені було отримано з використанням старої, неправильної формули для елемента  $S$ -матриці, виправимо їх, вставивши для початкового та кінцевого електронів множники  $\sqrt{Z_2}$ . Вираз (6.33) для структури точної вершини набуває вигляду

$$Z_2 \Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (7.46)$$

де  $\Gamma^\mu(p', p)$  є сумою ампутуваних вершинних електрон-фотонних діаграм.

Ми можемо скористатися цим виразом і знову обчислити форм-фактори у першому порядку за  $\alpha$ . Оскільки  $Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$ , а  $F_2$  з'являється лише в першому за  $\alpha$  порядку, наш старий результат для  $F_2$  не змінюється. Для обчислення  $F_1$  запишемо ліву частину (7.46) як

$$Z_2 \Gamma^\mu = (1 + \delta Z - 2)(\gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu + \gamma^\mu \cdot \delta Z_2,$$

де  $\delta Z_2$  і  $\delta \Gamma^\mu$  позначають поправки порядку  $\alpha$  до цих величин. Порівнюючи це з правою частиною (7.46), бачимо, що до  $F_1(q^2)$  додається новий внесок, що дорівнює  $\delta Z_2$ . Нехай  $\delta F_1(q^2)$  позначає поправку (не фіксовану) до форм-фактора, обчисленого в § 6.3. Нагадаємо, що з результатів наприкінці § 7.1 впливає тотожність  $\delta Z_2 = -\delta F_1(0)$ . Тоді

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + [\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)].$$

Це цілком збігається з постульованим, але не доведеним виразом (6.55). Отже, врахування перенормування напруженості поля обґрунтовує процедуру фіксації, яка в § 6.3 була проведена на підставі хистких аргументів.

На цьому етапі аналізу важко збагнути, яким чином при обчисленні  $F_1$  скорочуватимуться розбіжності у вищих порядках. Навіть гірше — хоча ми й намагалися в § 6.3 показати, що  $F_1(0) = 1$  у будь-якому порядку, справедливості цього припущення у першому порядку за  $\alpha$  видається наслідком випадкового збігу чисел.

Строго постановка задачі є такою. Визначимо другий масштабний множник  $Z_1$  через

$$\Gamma^\mu(q=0) = Z_1^{-1} \gamma^\mu, \quad (7.47)$$

де  $\Gamma^\mu$  — точна ампутована вершинна функція. Для доведення рівності  $F_1(0) = 1$  треба показати, що  $Z_1 = Z_2$ , тобто перенормування вершини точно компенсує перенормування напруженості поля. Наприкінці § 7.4 ми покажемо, що ця тотожність справедлива в будь-якому порядку теорії збурень.

Аналіз редукційної формули ЛСЦ завершимо ще одним формальним спостереженням. Початкові та кінцеві частки у цій формулі відрізняються лише знаком відповідного фур'є-перетворення імпульсу  $p_i^0$  або  $k_i^0$ . Звідси випливає, що аналітично продовжуючи лишок полюсу в точці  $p^2$  від позитивних до негативних  $p^0$ , можна перетворити елемент  $S$ -матриці з часткою  $\phi(\mathbf{p})$  в кінцевому стані до елемента  $S$ -матриці з античасткою  $\phi^*(-\mathbf{p})$  у початковому стані. Отже, є справедливою *кросинг-симетрія*, яку ми вивели в § 5.4 на підставі діаграм:

$$\langle \cdots \phi(p) | S | \cdots \rangle \Big|_{p=-k} = \langle \cdots | S | \phi^*(k) \cdots \rangle.$$

А оскільки доведення формули ЛСЦ не залежить від пертурбативних методів, то кросинг-симетрія  $S$ -матриці є загальним результатом квантової теорії поля, а не просто певною властивістю фейнманових діаграм.

### § 7.3. Оптична теорема

У § 7.1 ми побачили, що двоточкова кореляційна функція квантових полів при її розгляді, як аналітичної функції імпульсу  $p^2$ , має розрізи, що відповідають багаточастковим проміжним станам. Цей результат не став несподіванкою для тих, хто знайомий з нерелятивістською теорією розсіяння, у якій амплітуда, як функція енергії, також має розріз уздовж позитивної дійсної осі. Уявна складова амплітуди з'являється внаслідок її розриву на цьому розрізі. Відповідно до *оптичної теореми*, уявна складова амплітуди розсіяння вперед пропорційна повному перерізові. Зараз ми доведемо польовий варіант цієї теореми і проілюструємо, як вона виникає обчисленнях фейнманових діаграм.

Оптична теорема безпосередньо впливає з унітарності  $S$ -матриці:  $S^\dagger S = 1$ . Підставляючи  $S = 1 + iT$ , як у (4.72), маємо

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T. \quad (7.48)$$

Розглянемо матричний елемент цього виразу між двочастковими станами  $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle$  і  $|\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle$ . Для обчислення правої частини, вставимо повний набір

проміжних станів:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T^\dagger T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = \sum_n \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 \mathbf{q}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T^\dagger \{ \mathbf{q}_i \} \rangle \langle \{ \mathbf{q}_i \} | T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle.$$

Тепер представимо елементи  $T$ -матриці, як інваріантні матричні елементи  $\mathcal{M}$ , помножені на дельта-функції, що забезпечують збереження 4-імпульсу. Тоді тотожність (7.48) стає

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow p_1 p_2) = \sum_n \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 \mathbf{q}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_i}} \right) \times \\ \times \mathcal{M}^*(p_1 p_2 \rightarrow q_i) \mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow q_i) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \sum_i q_i),$$

помноженою на спільну дельта-функцію  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$ . Скорочено запишемо цю рівність як

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(a \rightarrow b) = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f), \quad (7.49)$$

де сума береться за всіма можливими наборами  $f$  часток у кінцевому стані. Ця тотожність образно показана на Рис. 7.5. Дарма що досі ми вважали  $a$  і  $b$  двочастковими станами, вони так само можуть бути одночастковими або ж багаточастковими асимптотичними станами.

$$\text{Diagram: } \begin{array}{c} k_2 \quad p_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Shaded Circle} \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ k_1 \quad p_1 \end{array} = \sum_f \int d\Pi_f \left( \begin{array}{c} k_2 \\ \swarrow \\ \text{Shaded Circle} \\ \nearrow \\ k_1 \end{array} \begin{array}{c} f \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} f \\ \swarrow \\ \text{Shaded Circle} \\ \searrow \\ p_1 \end{array} \begin{array}{c} p_2 \end{array} \right)$$

**Рис. 7.5.** Оптична теорема. Уявна частина амплітуди розсіяння вперед виникає за рахунок внесків усіх можливих багаточасткових проміжних станів.

Підставивши  $p_i = k_i$  і додавши потрібні для формули (4.79) кінематичні множники, щоб утворити переріз розсіяння, одержимо стандартний вигляд оптичної теореми:

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) = 2E_{\text{цм}} p_{\text{цм}} \sigma_{\text{tot}}(k_1, k_2 \rightarrow \text{всі}), \quad (7.50)$$

де  $E_{\text{цм}}$  є повна енергія, а  $p_{\text{цм}}$  — імпульс кожної з часток у системі центру мас. Цей вираз пов'язує амплітуду розсіяння на нульовий кут з повним перерізом утворення всіх кінцевих станів. Оскільки уявна складова амплітуди розсіяння вперед визначає послаблення спрямованої вперед хвилі, коли

пучок проходить крізь мішень, то цілком природно, що вона пропорційна ймовірності розсіяння. Вираз (7.50) дає точний зв'язок між ними.

### Оптична теорема для фейнманових діаграм

Тепер розглянемо, як ця тотожність для уявної складової елемента  $S$ -матриці з'являється в розкладенні за фейнмановими діаграмами. Легко перевірити (наприклад, у КЕД), що кожна діаграма, яка дає внесок в елемент  $S$ -матриці  $\mathcal{M}$ , є суто дійсна за винятком випадків, коли деякі знаменники прагнуть до нуля, і тоді стає істотним доданок  $i\epsilon$ . Таким чином, фейнманова діаграма дає уявний внесок у  $\mathcal{M}$  лише тоді, коли віртуальні частки в діаграмі потрапляють на масову поверхню. Покажемо, як виокремити й обчислити цю уявну складову.

Для наших теперішніх цілей *визначимо*  $\mathcal{M}$  за допомогою фейнманових правил для теорії збурень. Це дозволить розглядати  $\mathcal{M}(s)$ , як аналітичну функцію комплексної змінної  $s = E_{\text{цм}}$ , навіть попри те, що елементи  $S$ -матриці визначені лише для зовнішніх часток з дійсними імпульсами.

Передовсім покажемо, що поява ненульової уявної складової  $\mathcal{M}(s)$  завжди вимагає сингулярності типу розрізу. Нехай  $s_0$  є пороговою енергією утворення найлегшого багаточасткового стану. Для дійсних  $s < s_0$  проміжний стан не може лежати на масовій поверхні, тому  $\mathcal{M}(s)$  є дійсна, а отже, в цьому випадку маємо рівність

$$\mathcal{M}(s) = [\mathcal{M}(s^*)]^* \quad (7.51)$$

Обидві частини цієї рівності є аналітичними функціями  $s$ , бо її можна аналітично продовжити на всю комплексну площину  $s$ . Зокрема, поблизу дійсної осі при  $s > s_0$  з (7.51) випливає, що

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{M}(s + i\epsilon) &= \operatorname{Re} \mathcal{M}(s - i\epsilon); \\ \operatorname{Im} \mathcal{M}(s + i\epsilon) &= -\operatorname{Im} \mathcal{M}(s - i\epsilon). \end{aligned}$$

Отже, вздовж дійсної осі існує розріз, що починається при пороговій енергії  $s_0$ ; а розрив на розрізі є

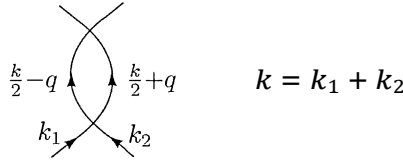
$$\operatorname{Disc} \mathcal{M}(s) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{M}(s + i\epsilon).$$

Зазвичай простіше обчислити цей розрив, а не безпосередньо уявну складову. Припис  $i\epsilon$  у фейнмановому пропагаторі вказує, що фізичні амплітуди розсіяння треба обчислювати над розрізом при  $s + i\epsilon$ .

У § 7.1 ми вже бачили, що діаграма власної енергії електрона також має розріз, який починається на порозі утворення електрон-фотонного стану. Розглянемо загальніші однопетльові діаграми й покажемо, що неоднорідності на розрізах дають саме такі уявні складові, яких вимагає вираз

(7.49). Узагальнення цього результату на багатопетльові діаграми було одержано Куткоським,<sup>41</sup> який показав, що розрив фейнманової діаграми на розрізі визначається набором простих *правил розрізання*.<sup>42</sup>

Почнемо з перевірки (7.49) для теорії  $\phi^4$ . Оскільки права частина (7.49) з'являється в порядку  $\lambda^2$ , ми можемо припустити, що перший внесок у  $\text{Im } \mathcal{M}$  також виникає від діаграм вищих порядків. Розглянемо, наприклад, діаграму порядку  $\lambda^2$ :



з петлею в  $s$ -каналі. (Легко показати, що відповідні  $t$ - і  $u$ -канальні діаграми не мають сингулярностей типу розрізів для  $s$  вище порогу.) Повний імпульс є  $k = k_1 + k_2$ , і для простоти оберемо імпульси симетрично, як показано вище. Значення цієї фейнманової діаграми є

$$i\delta\mathcal{M} = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k/2 - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k/2 + q)^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.52)$$

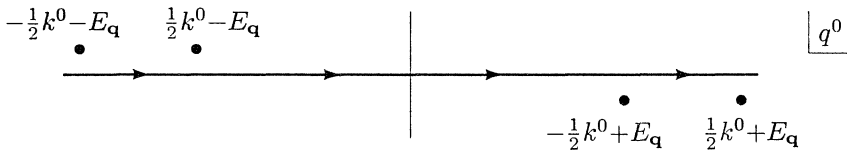
Якщо обчислювати інтеграл методами § 6.3, то віків поворот дасть додатковий множник  $i$ , тому нижче порогу  $\delta\mathcal{M}$  є суто дійсною.

Далі маємо переконатися, що інтеграл (7.52) має розрив уздовж дійсної осі у фізичній зоні  $k^0 > 2m$ . Найпростіше знайти цей розрив, обчисливши інтеграл для  $k^0 < 2m$ , а потім здійснивши аналітичне продовження. Вдавшись до методу фейнманових параметрів, інтеграл узяти неважко (Задача 7.1). Проте наочніше скористатися не таким прямолінійним підходом.

Працюватимемо в системі ЦМ, у якій  $k = (k^0, \mathbf{0})$ . Тоді підінтегральний вираз у (7.52) має чотири полюси для змінної інтегрування  $q^0$ . Вони розташовані в

$$q^0 = \frac{1}{2} k^0 \pm (E_q - i\epsilon), \quad q^0 = -\frac{1}{2} k^0 \pm (E_q - i\epsilon).$$

Два з цих полюсів лежать вище дійсної осі  $q^0$ , а два — нижче:



<sup>41</sup>R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.* 1, 429 (1960).

<sup>42</sup>Ці правила мають простий вигляд лише для сингулярностей у фізичній зоні, а поза нею сингулярності трьох- і багаточасткових амплітуд стають дуже заплутаними. Цей предмет розглядається у книзі [60].

Замкнемо конур знизу й обчислимо лишки в полюсах у нижній півплощині. З двох полюсів лише один,  $q^0 = \frac{1}{2}k^0 \pm (E_q - i\varepsilon)$ , дає внесок у розрив. Зазначимо, що отримання лишку в цьому полюсі еквівалентно заміні

$$\frac{1}{(k/2 + q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((k/2 + q)^2 - m^2) \quad (7.53)$$

під знаком інтеграла по  $dq^0$ .

Внесок від цього полюсу призводить до інтеграла

$$\begin{aligned} i\delta\mathcal{M} &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q} \frac{1}{(k^0 - E_q)^2 - E_q^2} = \\ &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_m^\infty dE_q E_q |\mathbf{q}| \frac{1}{2E_q} \frac{1}{k^0(k^0 - 2E_q)}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Підінтегральний вираз у другому рядку має полюс при  $E_q = k^0/2$ . Коли  $k^0 < 2m$ , він не знаходиться на контурі інтегрування, тож  $\delta\mathcal{M}$  явно є дійсною. Коли ж  $k^0 > 2m$ , він лежить трохи вище або трохи нижче контуру інтегрування, залежно від того, який знак має мала уявна складова  $k^0$ :



Таким чином, інтеграл зазнає розриву між  $k^2 + i\varepsilon$  і  $k^2 - i\varepsilon$ . Для його обчислення скористаємося

$$\frac{1}{k^0 - 2E_q \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{k^0 - 2E_q} \mp i\pi \delta(k^0 - 2E_q),$$

(де  $P$  позначає головне значення). Розрив одержуємо шляхом заміни полюсу на дельта-функцію, що еквівалентно заміні дельта-функцією початкового пропагатора:

$$\frac{1}{(k/2 - q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((k/2 - q)^2 - m^2). \quad (7.55)$$

Простежмо ще раз за всіма етапами і спробуймо збагнути, що ми довели. Повернемося до початкового інтеграла (7.52), перепозначимо імпульси в пропагаторах через  $p_1, p_2$  і зробимо заміну

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k).$$

Ми показали, що розрив у інтегралі можна обчислити, замінивши кожен з пропагаторів на дельта-функцію:

$$\frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p_i^2 - m^2). \quad (7.56)$$

Розрив у  $\mathcal{M}$  виникає від тієї частини інтеграла по  $d^4q$ , де одночасно виконуються умови, задані обома дельта-функціями. Інтегруючи по них, ми переносимо імпульси  $p_i$  на масову поверхню і перетворюємо інтеграли  $d^4p_i$  в інтеграли по релятивістському фазовому об'єму. Крім того, у виразі (7.52) лишилися множник  $\lambda^2$ , квадрат амплітуди у головному порядку та фактор симетрії ( $\frac{1}{2}$ ), який можна інтерпретувати як множник, що виникає через тотожність бозонів у кінцевому стані. Отже, ми показали, що в порядку  $\lambda^2$

$$\begin{aligned} \text{Disc } \mathcal{M}(k) &= 2i \text{Im } \mathcal{M}(k) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}_1}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}_2}} |\mathcal{M}(k)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k). \end{aligned}$$

Це явно підтверджує справедливість (7.49) у порядку  $\lambda^2$  для теорії  $\phi^4$ .

У наведених міркуваннях ми не скористались ані тим, що обом пропагаторам у діаграмі відповідають рівні маси, ані тим, що ці пропагатори пов'язані з простою точковою вершиною, тому наш аналіз можна поширити і на довільну однопетльову діаграму. Щоразу, коли в межах інтегруван-

$$\begin{aligned} (a) \quad & 2 \text{Im} \left( \text{Diagram with two wavy lines and a vertical dashed line} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram with two wavy lines} \right|^2 \\ (b) \quad & 2 \text{Im} \left( \text{Diagram with two wavy lines and a circle} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram with two wavy lines and a semi-circle} \right|^2 \end{aligned}$$

**Рис. 7.6.** Два внески в оптичну теорему для розсіяння Бабі.

ня по імпульсах у діаграмі обидва пропагатори одночасно потрапляють на масову поверхню, ми можемо скористатися вищенаведеними аргументами для обчислення ненульового розриву  $\mathcal{M}$ . Величину цього розриву можна знайти, здійснивши для кожного з пропагаторів заміну (7.56). Наприклад, для порядку  $\alpha^2$  розсіяння Бабі (Рис. 7.6), ми можемо обчислити уявні складові, розрізавши діаграми і розмістивши імпульси розрізаних пропагаторів

на масовій поверхні, застосовуючи (7.56). Полюси додаткових пропагаторів не роблять внеску в розріз. Інтегруючи по дельта-функціях, як і в попередньому абзаці, ми отримаємо співвідношення між уявними складовими цих діаграм і внесками до повного перерізу.

Куткоський показав, що такий метод обчислення розривів є цілком загальним. Фізичний розрив будь-якої діаграми можна знайти, дотримуючись алгоритму:

1. Розрізаємо діаграму всіма можливими способами так, щоб імпульси розрізаних пропагаторів одночасно лежали на масовій поверхні.
2. Для кожного розрізу робимо заміну  $\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2)$ , після чого обчислюємо петльові інтеграли.
3. Беремо суму внесків від усіх можливих розрізів.

Застосовуючи ці *правила розрізання*, можна довести оптичну теорему (7.49) у будь-якому порядку теорії збурень.

### Нестабільні частки

Правила розрізання свідчать, що оптична теорема (7.49) виконується не лише для елементів  $S$ -матриці, а й для будь-яких амплітуд  $\mathcal{M}$ , які можна визначити через фейнманові діаграми. Це стає дуже корисним, коли ми розглядаємо нестабільні частки, що в принципі не можуть бути асимптотичними станами.

Згадаймо, що відповідно до співвідношення (7.43), точна двоточкова функція скалярного поля має вигляд

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}.$$

Ми визначили величину  $-iM^2(p^2)$ , як суму всіх можливих одночастково не-привідних вставлень до бозонного пропагатора, але на таких самих підставах можемо розглядати її, як суму всіх ампутованих діаграм для процесу „розсіяння“ 1 частка  $\rightarrow$  1 частка. З формули ЛСЦ випливає, що

$$\mathcal{M}(p \rightarrow p) = -ZM^2(p^2). \quad (7.57)$$

Ми можемо скористатися цим співвідношенням та оптичною теоремою для вивчення властивостей уявної складової  $M^2(p^2)$ .





$\mathcal{M}(p \rightarrow p)$  і так само визначивши матричні елементи розпаду  $\mathcal{M}(p \rightarrow f)$  через фейнманові діаграми, з виразу (7.49) одержимо

$$2 \operatorname{Im} M^2(p^2) = -\operatorname{Im} \mathcal{M}(p \rightarrow p) = -\frac{1}{2} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2, \quad (7.62)$$

де сума береться за всіма можливими кінцевими станами  $f$ . Тому ширина розпаду є

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2, \quad (7.63)$$

як і було вказано у виразі (4.86).

Ще раз наголосимо, що виведення цього рівняння справедливе лише для нестабільних часток з довгою тривалістю життя, коли  $\Gamma \ll m$ . Для випадку широкого резонансу треба враховувати повну залежність  $M^2(p^2)$  від енергії.

## § 7.4. Тотожність Варда – Такахаші

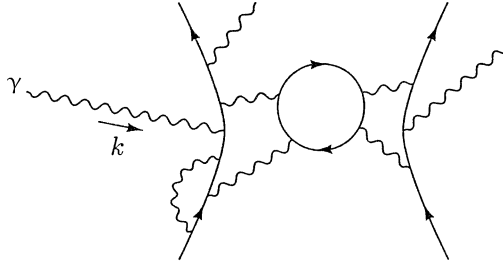
З чотирьох „хвостів“, перерахованих на початку цього розділу, залишилася недоведеною тільки тотожність Варда. Згадаймо з § 5.5, що вона стверджувала про наступне: якщо  $\mathcal{M}(k) = \varepsilon_\mu(k) \mathcal{M}^\mu(k)$  є амплітудою певного процесу КЕД, що включає в початковому або кінцевому стані фотон з імпульсом  $k$ , то вона обертається на нуль при заміні  $\varepsilon_\mu$  на  $k_\mu$ :

$$k_\mu(k) \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (7.64)$$

Для доведення цього твердження корисно отримати загальнішу тотожність для кореляційних функцій КЕД, що має назву *тотожності Варда – Такахаші*. Для розгляду цього загального випадку позначимо через  $\mathcal{M}$  фур'є-перетворення кореляційної функції, в якій зовнішні імпульси не конче розташовані на масовій поверхні. У цьому випадку права частина (7.64) містить ненульові члени. А проте, коли для виокремлення елемента  $S$ -матриці ми скористаємося формулою ЛСЦ, то переконаємося, що ці члени не дають внеску.

Будемо доводити тотожність Варда – Такахаші у довільному порядку  $\alpha$ , безпосередньо розглядаючи фейнманові діаграми, що дають внесок у  $\mathcal{M}(k)$ . Загалом ця тотожність не виконується для окремих фейнманових діаграм; ми маємо взяти суму за всіма діаграмами в поточному порядку.

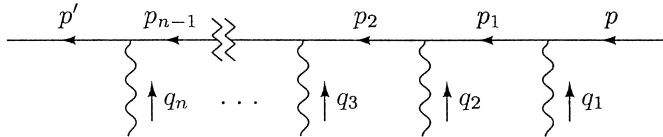
Візьмемо типову діаграму для типової амплітуди  $\mathcal{M}(k)$ :



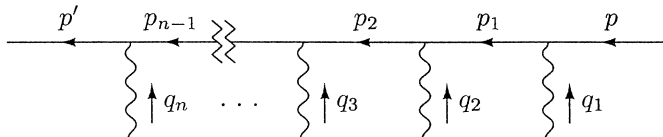
Якщо прибрати фотон  $\gamma(k)$ , матимемо простішу діаграму, що є частиною спрощеної амплітуди  $\mathcal{M}_0$ . Якщо у спрощену діаграму знову десь вставити фотон, ми знову одержимо внесок у  $\mathcal{M}(k)$ . Вирішальне спостереження полягає в тому, що коли ми візьмемо суму за всіма діаграмами, які дають внесок у  $\mathcal{M}_0$ , а далі підсумуємо за всіма точками вставлення фотона в кожній з цих діаграм, то в результаті одержимо  $\mathcal{M}(k)$ . Тотожність Варда – Такаhashi справедлива для кожної діаграми, яка дає внесок у  $\mathcal{M}_0$ , коли взяти суму за всіма можливими точками вставлення; це твердження ми й доведемо.

Є два способи вставити фотонну лінію в діаграму — приєднати її до електронної лінії, що виходить з діаграми і сполучає дві зовнішні точки, або до електронної петлі. Розглянемо по черзі кожен з цих способів.

Спершу припустимо, що електронна лінія сполучає дві зовнішні точки. До того, як ми вставили фотон, лінія мала вигляд



Імпульси електронних пропагаторів є  $p, p_1 = p + q_1, p_2 = p_1 + q_2$  — і так далі до  $p' = p_{n-1} + q_n$ . Якщо маємо  $n$  вершин, фотон можемо вставити в  $n + 1$  різних місцях. Нехай ми вставили його після  $i$ -ї вершини:



До імпульсів усіх електронних пропагаторів зліва від нового фотона тепер додалося  $k$ .

Поглянемо на значення цих діаграм, якщо  $\epsilon_\mu(k)$  замінити на  $k_\mu$ . Добуток  $k_\mu$  і нової вершини зручно записати, як

$$-iek_\mu \gamma^\mu = -ie[(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)].$$

Перемноживши на прилеглі електронні пропагатори,

$$\frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} (-ie\not{k}) \frac{i}{\not{p}_i - m} = e \left( \frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right). \quad (7.65)$$

Отже, діаграма з фотоном, вставленим після вершини  $i$ , має структуру

$$\begin{aligned} \dots \leftarrow \begin{array}{c} \text{фотон } k \\ \text{електронні лінії } q_{i+1}, q_i \end{array} \dots &= \dots \left( \frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \times \\ &\times \left( \frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \left( \frac{i}{\not{p}_{i-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots \end{aligned}$$

Таким самим чином отримуємо діаграму з фотоном після вершини  $i - 1$ :

$$\begin{aligned} \dots \leftarrow \begin{array}{c} \text{фотон } k \\ \text{електронні лінії } q_{i+1}, q_i \end{array} \dots &= \dots \left( \frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left( \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \times \\ &\times \left( \frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} - \frac{i}{\not{p}_{i-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots \end{aligned}$$

Зазначимо, що перший член у цьому виразі скорочується з другим у попередньому. Таке скорочення виконуватиметься для будь-якої пари діаграм, у яких точки вставлення фотона знаходяться поруч. Якщо підсумувати за всіма можливими точками вставлення, то скорочуються всі члени за винятком тих, що не мають пари на кінцях. Доданок, що з'являється від вставлення фотона після останньої вершини (далеко зліва), дорівнює  $e$ , помноженому на значення початкової діаграми; інший доданок без пари виникає від вставлення фотона перед першою вершиною і має такий самий вигляд за винятком знаку мінус та заміни всюди  $p$  на  $p + k$ . Мовою діаграм, наш результат є

$$\sum_{\text{точки вставки}} k_\mu \cdot \left( \begin{array}{c} \text{діаграма з фотоном } k \text{ після вершини } \mu \end{array} \right) = e \left( \begin{array}{c} \text{діаграма з фотоном } k \text{ після останньої вершини} \\ - \text{діаграма з фотоном } k \text{ перед першою вершиною} \end{array} \right) \quad (7.66)$$

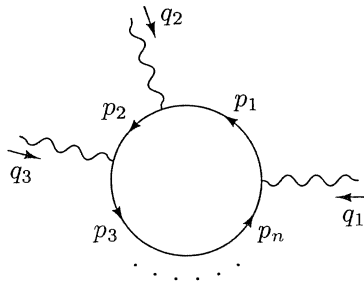
де з міркувань симетрії зроблено підстановку  $p' + k \rightarrow q$ . У кожній діаграмі зліва в (7.66) вхідний імпульс електронної лінії є  $p$ , а вихідний  $q$ . Відповідно

до формули ЛСЦ, з кожної діаграми можна виокремити внесок у  $S$ -матрицю. Для цього маємо взяти коефіцієнт при добутку полюсів

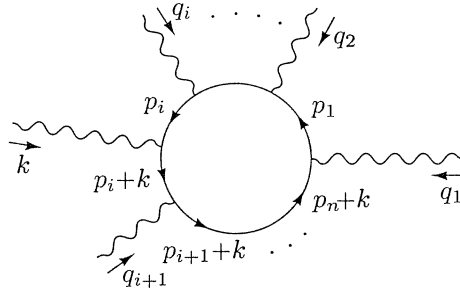
$$\left(\frac{i}{\not{q} - m}\right)\left(\frac{i}{\not{p} - m}\right).$$

Кожен член справа в (7.66) містить один з цих полюсів, але жоден не має одразу обох. Таким чином, права частина (7.66) не дає ніякого внеску в  $S$ -матрицю.<sup>43</sup>

Для завершення доведення маємо розглянути випадок, коли фотон приєднується до електронної петлі. До вставлення фотона типова петля мала вигляд



Імпульси електронних пропагаторів є  $p_1, p_1 + q_2 = p_2$  — і так далі до  $p_n$ . Нехай фотон  $\gamma(k)$  вставлено між вершинами  $i$  та  $i + 1$ :



Тепер ми маємо додатковий імпульс  $k$ , що пробігає по петлі від нової вершини. Домовимося вважати, що ця вершина має порядковий номер 1.

Щоб підсумувати за всіма можливими способами вставлення фотона в петлю, застосуємо рівність (7.65) до кожної діаграми. Для тієї з них, у якій фотон вставлено між вершинами 1 і 2, маємо

$$\begin{aligned} -e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \left( \frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left( \frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{i}{\not{p}_1 - m} - \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right]. \end{aligned}$$

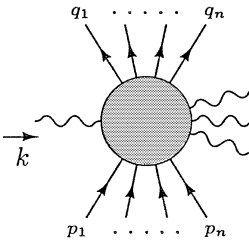
<sup>43</sup>Цей етап доведення стане простим, якщо ми перерозподілимо пертурбативний ряд таким чином, щоб пропагатор містив  $m$ , а не  $m_0$ . Це буде зроблено в Розділі 10.

Перший член скоротиться з одним із членів іншої діаграми, у якій фотон вставлено між вершинами 2 і 3. Такі самі скорочення відбудуться для кожної пари сусідніх діаграм. Після підсумовування за  $n$  можливими способами вставлення фотона залишиться

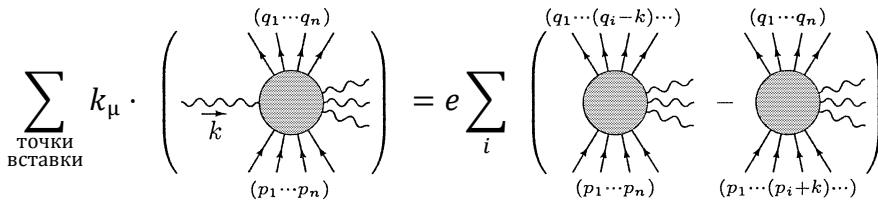
$$-e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \left( \frac{i}{\not{p}_n - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left( \frac{i}{\not{p}_{n-1} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left( \frac{i}{\not{p}_1 - m} \right) \gamma^{\lambda_1} - \right. \\ \left. - \left( \frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left( \frac{i}{\not{p}_{n-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left( \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right]. \quad (7.67)$$

Пересуваючи змінну інтегрування у другому члені на  $k$ , побачимо, що решта два члени також скорочуються. Отже, діаграми, в яких фотон приєднується до замкненої петлі, не дають внеску.

Тепер зберемо до купи всі частини доведення. Нехай амплітуда  $\mathcal{M}$  має  $2n$  зовнішніх електронних ліній —  $n$  вхідних і  $n$  вихідних. Позначимо вхідні імпульси як  $p_i$ , а вихідні як  $q_i$ :

$$\mathcal{M}(k; p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_n) =$$


(Також амплітуда може містити довільну кількість додаткових зовнішніх фотонних ліній.) Амплітуда  $\mathcal{M}_0$  не має фотона  $\gamma(k)$ , а в іншому ідентична  $\mathcal{M}$ . Щоб з  $\mathcal{M}_0$  отримати  $k_\mu \mathcal{M}^\mu$ , треба взяти суму за всіма діаграмами, що дають внесок у  $\mathcal{M}_0$ , а в кожній з цих діаграм підсумувати за всіма можливими способами вставлення фотона. Сума за точками вставлення в петлі для будь-якої діаграми дає нуль. Сума за точками вставлення у наскрізній електронній лінії в будь-якій діаграмі дає внесок типу (7.66). Просумувавши за всіма точками вставлення для кожної діаграми, маємо

$$\sum_{\text{точки вставки}} k_\mu \cdot \left( \text{diagram with } k \text{ entering loop} \right) = e \sum_i \left( \text{diagram with } k \text{ entering at } i \text{ and } i-k \text{ leaving} \right) - \left( \text{diagram with } k \text{ entering at } i \text{ and } i+k \text{ leaving} \right)$$


де сіре коло позначає будь-яку діаграму, що дає внесок у  $\mathcal{M}_0$ . І, остаточно,

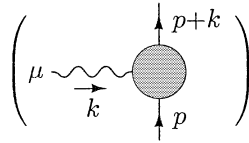
сума за всіма цими діаграмами:

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots q_n) = e \sum_i \left[ \mathcal{M}_0(p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots (q_i - k) \cdots) - \mathcal{M}_0(p_1 \cdots (p_i + k) \cdots; q_1 \cdots q_n) \right]. \quad (7.68)$$

Це і є тотожність Варда – Такаhashi для кореляційних функцій у КЕД. Ми вже з’ясували, що права частина не дає внеску в елемент  $S$ -матриці; отже, в тому окремому випадку, коли  $\mathcal{M}$  є елементом  $S$ -матриці, (7.68) переходить у тотожність Варда (7.64).

Перш ніж продовжити розгляд цієї тотожності, вкажемо на потенційну ваду нашого доведення. Для скорочення доданків у (7.67) ми пересунули змінну інтегрування на константу. Проте, якщо інтеграл розбіжний, такий крок є неприпустимим. Так само у виразах, що дають (7.66), можуть бути розбіжні інтеграли по петлях. Хоча тут відсутній явний зсув змінної, на практиці при обчисленні інтегралів його справді виконують. У кожному разі, ультрафіолетові розбіжності потенційно спроможні зруйнувати тотожність Варда – Такаhashi. Приклад цієї проблеми, а також її загальне рішення, ми розглянемо в наступному параграфі.

Найпростіший приклад тотожності Варда – Такаhashi є її застосування до триточкової функції з одним входнім і одним вихідним електронами та одним зовнішнім фотоном:



Тоді

$$k_\mu \cdot \left( \text{diagram} \right) = e \left( \text{diagram}_1 - \text{diagram}_2 \right)$$

Величини у правій частині є точними електронними пропагаторами з імпульсами  $p$  і  $(p + k)$  відповідно; позначимо їх, як  $S(p)$  і  $S(p + k)$ . Згідно з (7.23),

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}.$$

Повну триточкову амплітуду в лівій частині можна переписати, як і в (7.44), у вигляді добутку точних пропагаторів входного та вихідного електронів і діаграми розсіяння з ампутуваними зовнішніми лініями. У нашому випадку

ампутована діаграма є вершиною  $\Gamma^\mu(p + k, p)$ . Тотожність Варда – Такахаші стверджує, що

$$S(p + k)[-iek_\mu \Gamma^\mu(p + k, p)]S(p) = e(S(p) - S(p + k)).$$

Щоб спростити цей вираз, помножимо його зліва та справа на діракові матриці  $S^{-1}(p + k)$  і  $S^{-1}(p)$  відповідно. Тоді

$$-ik_\mu \Gamma^\mu(p + k, p) = S^{-1}(p + k) - S^{-1}(p). \quad (7.69)$$

Часто назву *тотожність Варда – Такахаші* використовують саме для цього окремого випадку.

Ми можемо застосувати (7.69) для отримання загального співвідношення між константами  $Z_1$  і  $Z_2$ . Визначимо  $Z_1$  у (7.47), як

$$\Gamma^\mu(p + k, p) \rightarrow Z_1^{-1} \gamma^\mu \quad \text{при } k \rightarrow 0.$$

Константу  $Z_2$  ми визначили, як лишок у полюсі  $S(p)$ :

$$S(p) \sim \frac{iZ_2}{\not{p} - m}.$$

Взявши  $p$  поблизу масової поверхні і розклавши (7.69) в околиці  $k = 0$ , маємо для членів першого порядку зліва і справа:

$$-iZ_1^{-1} \not{k} = -iZ_2^{-1} \not{k},$$

або

$$Z_1 = Z_2. \quad (7.70)$$

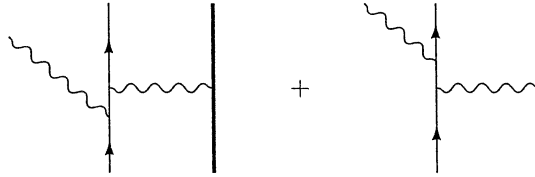
Таким чином, тотожність Варда – Такахаші забезпечує точне скорочення нескінченних перенормовочних множників у амплітуді електронного розсіювання, про що йшлося в § 7.2. Розглянувши цей результат разом з точним формальним виразом для електронних форм-факторів (7.46), ми виявимо, що тотожність гарантує рівність  $F_1(0) = 1$  в усіх порядках теорії збурень.

Досить часто в літературі поняття *тотожність Варда*, *збереження струму* і *калібровочна інваріантність* вживаються як синоніми. Це цілком зрозуміло, бо тотожність Варда є діаграмним представленням твердження про збереження електричного струму, яке своєю чергою впливає з калібровочної інваріантності. Проте ми й надалі розрізнятимемо їх. Під *калібровочною інваріантністю* розумітимемо фундаментальну симетрію лагранжіана, під *збереженням струму* — рівняння руху, що впливає з цієї симетрії і, нарешті, під *тотожністю Варда* — діаграмну тотожність, що накладає вимогу симетрії на квантовомеханічну амплітуду.

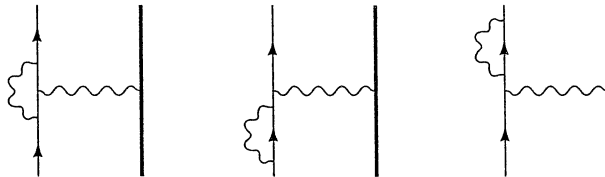


## § 7.5. Перенормування електричного заряду

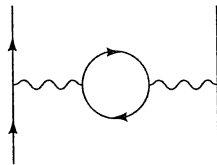
На початку Розділу 6 ми розглядали радіаційні поправки порядку  $\alpha$  до розсіяння електрона на важкій мішені. Ми обчислили (принаймні, у класичному наближенні) діаграми гальмівного випромінювання:



і поправки, викликані віртуальними фотонами:



Наш розгляд перенормування напруженості поля в цьому розділі остаточно прояснив роль двох останніх діаграм. Зокрема, ми побачили, що тотожність Варда і рівність  $Z_1 = Z_2$ , як один з її наслідків, гарантують, що сума всіх поправок, пов'язаних з віртуальним фотоном, обертається на нуль при  $q \rightarrow 0$ . Залишився ще один тип радіаційних поправок для цього процесу:



Це є діаграма *поляризації вакууму* першого порядку за  $\alpha$ , яку іноді ще називають *власною енергією фотона*. Ми можемо трактувати її, як зміну структури фотонного пропагатора за рахунок віртуальної електрон-позитронної пари. Ця діаграма змінює ефективне поле  $^u(x)$ , яке впливає на розсіяний електрон. Потенційно це може змінити загальну напруженість поля, а також вплинути на його залежність від  $x$  (або, в фур'є-просторі, від  $q$ ). У поточному параграфі ми обчислимо цю діаграму і переконаємося, що вона справді призводить до обох згаданих ефектів.

### Загальне уявлення про перенормування заряду

Перед початком детальних розрахунків спробуємо зрозуміти, якого типу результат ми очікуємо отримати і як його можна інтерпретувати. Частина

діаграми, що нас найбільше цікавить, це електронна петля:

$$\begin{aligned}
 \mu \text{ --- } q \text{ --- } \text{ (loop with } k \text{ and } k+q \text{) } \text{ --- } \nu &= (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\
 &\times \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] = \\
 &\equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q).
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

(Ферміонний петльовий множник  $(-1)$  було запроваджено в рівнянні (4.120).) Більш загально, визначимо  $i\Pi^{\mu\nu}(q)$ , як суму всіх одночастково не-привідних вставлень у фотонний пропагатор:

$$\mu \text{ --- } q \text{ --- } \text{ (1CH) } \text{ --- } \nu \equiv i\Pi^{\mu\nu}(q), \tag{7.72}$$

а отже,  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  є внеском другого порядку за  $e$  в  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ . Єдині тензори, що можуть з'явитися в  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ , це  $g^{\mu\nu}$  і  $q^\mu q^\nu$ . Проте, згідно з тотожністю Варда,  $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$ , тому  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  є пропорційний проекторові  $(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2)$ . Також ми очікуємо, що  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  не має полюсу при  $q^2 = 0$ , бо його єдиним очевидним джерелом міг бути одночастковий безмасовий проміжний стан, який не може виникнути в жодній з 1ЧН діаграм.<sup>44</sup> Тому зручно виокремити тензорну структуру  $\Pi^{\mu\nu}$  наступним чином:

$$\Pi^{\mu\nu} = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \tag{7.73}$$

де  $\Pi(q^2)$  є регулярним при  $q^2 = 0$ .

Тоді точна двоточкова фотонна функція є

$$\begin{aligned}
 \mu \text{ --- } \text{ (shaded circle) } \text{ --- } \nu &= \text{ (wavy line) } + \text{ (1CH) } + \text{ (1CH)(1CH) } + \dots = \\
 &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2} \left[ i(q^2 g^{\rho\nu} - q^\rho q^\nu) \Pi(q^2) \right] \frac{-ig^{\sigma\nu}}{q^2} + \dots = \\
 &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma \Pi^2(q^2) + \dots,
 \end{aligned}$$

де  $\delta_\nu^\rho \equiv \delta_\nu^\rho - q^\rho q_\nu / q^2$ . З огляду на те, що  $\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma = \Delta_\nu^\rho$ , цей вираз можна ще спростити:

$$\mu \text{ --- } \text{ (shaded circle) } \text{ --- } \nu = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left( \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) =$$

<sup>44</sup> Можна довести, що такого полюсу насправді не існує, проте доведення цього факту є вельми нетривіальним. Швінгер показав, що в двох просторово-часових вимірах сингулярність у  $\Pi_2$ , пов'язана з парою безмасових ферміонів, є полюсом, а не розрізом; це є знаменитий контрприклад до наших аргументів. У чотирьох вимірах такої проблеми немає.



Крім постійного зсуву величини електричного заряду,  $\Pi(q^2)$  призводить до ще одного ефекту. Розглянемо процес розсіяння з ненульовим  $q^2$  і припустимо, що  $\Pi(q^2)$  обчислено в головному за  $\alpha$  порядку:  $\Pi(q^2) \approx \Pi_2(q^2)$ . Тоді амплітуда цього процесу включатиме величину

$$\frac{-ig_{\mu\nu}\left(\frac{e_0^2}{1-\Pi(q^2)}\right)}{q^2} \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \frac{-ig_{\mu\nu}\left(\frac{e^2}{1-[\Pi_2(q^2)-\Pi_2(0)]}\right)}{q^2}$$

(заміна  $e^2$  на  $e_0^2$  наразі не грає ролі). Величину в дужках можна інтерпретувати, як електричний заряд, залежний від  $q^2$ . Таким чином, весь ефект від заміни фотонного пропагатора в деревовидному наближенні на точний фотонний пропагатор полягає в тому, щоб замінити

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1-\Pi(q^2)} \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \frac{\alpha}{1-[\Pi_2(q^2)-\Pi_2(0)]}. \quad (7.77)$$

(У головному порядку треба додати  $\Pi$ -члени також і до чисельника, проте в Розділі 12 ми побачимо, що в разі заміни  $\Pi_2$  на  $\Pi$  вираз у такому вигляді залишиться справедливим в усіх порядках.)

### Обчислення $\Pi_2$

Доклавши чимало зусиль для інтерпретації  $\Pi_2(q^2)$ , тепер варто обчислити його. Повертаючись до (7.71), маємо

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right] = \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

З міркувань зручності ми написали  $e$  і  $m$ , замість  $e_0$  і  $m_0$ , оскільки різниця між ними дає в  $\Pi^{\mu\nu}$  внесок порядку  $\alpha^2$ .

Тепер знову запровадимо фейнманові параметри й об'єднаємо множники в знаменниках:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}, \end{aligned}$$

де  $\ell = k + xq$ . Чисельник (7.78), записаний через  $\ell$ , є

$$\text{Чисельник} = 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) + \text{(лінійні за } \ell \text{ члени)}$$

Вдавшись до вікового повороту і здійснивши заміну  $\ell^0 = i\ell_E^0$ , одержимо

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \times \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\ell_E^2 + g^{\mu\nu}\ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}, \quad (7.79)$$

де  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ . Цей інтеграл має сильну ультрафіолетову розбіжність. Якби ми обрізали його при  $\ell_E = \Lambda$ , то мали б провідний доданок

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

без компенсуючого члена  $q^\mu q^\nu$ . Цей результат порушує тотожність Варда, а фотон набуває нескінченної маси  $M \propto e\Lambda$ .

Наше доведення тотожності Варда руйнується саме таким чином, як ми й передбачали наприкінці попереднього параграфу: якщо інтеграл розбіжний, то пересунення змінної в (7.67) є неприпустимим. Для наших поточних розрахунків порушення тотожності Варда взагалі є катастрофічним — воно призводить до нескінченної маси фотона<sup>45</sup> в цілковитій суперечності з експериментом. На щастя, маємо можливість урятувати тотожність Варда.

Вище ми регуляризували розбіжний інтеграл найпростішим і найвіщим способом, обрізаючи його за великим імпульсом  $\Lambda$ . Є й інші шляхи регуляризації, і деякі з них дозволяють зберегти тотожність Варда. При обчисленні поправок до вершини та власної енергії електрона ми вдалися до регуляризації Паулі–Віллара. Такий спосіб (Задача 7.2), на відміну від примітивного обрізання, зберігає рівність  $Z_1 = Z_2$ , яка є наслідком тотожності Варда. Ми могли б завершити розпочаті обчислення, ввівши ферміони Паулі–Віллара. На жаль, для цього потрібно кілька наборів ферміонів, що робить цей метод занадто складним.<sup>46</sup> Наразі застосуємо простіший *метод розмір-*

<sup>45</sup> Ми могли б зробити фізичну масу фотона нульовою, додавши до лагранжіана компенсуючий член з нескінченною масою фотона. Загалом, лагранжіан можна підправляти, щоб забезпечити виконання тотожності Варда для будь-якої  $n$ -точкової кореляційної функції. Ця процедура дає ті ж самі результати, як і метод, до якого ми збираємося вдатися, проте вона набагато складніша.

<sup>46</sup> Детальніше див. книгу Бйоркена і Дрелла [9], стор. 154.

ної регуляризації, запропонований 'т Гоофтом і Вельтманом.<sup>47</sup> Розмірна регуляризація зберігає тотожність Варда не лише в КЕД, а й у широкому класі загальніших теорій.

У випадках, коли різні способи регуляризації дають різні результати для спостережних величин, це відбувається тому, що один з них (або й усі) порушують якусь симетрію (скажімо, тотожність Варда). Тоді виходять з умови, що симетрія є фундаментальною, і вимагають її збереження при регуляризації. Проте обґрунтованість такого вибору довести неможливо, і ми приймаємо симетрію, як нову аксіому.

### Розмірна регуляризація

Ідея розмірної регуляризації на загал є дуже проста і полягає в розгляді фейнманової діаграми, як аналітичної функції від розмірності простору  $d$ . Для досить малих  $d$  будь-який петльовий інтеграл збігається, і можна довести тотожність Варда. Остаточні вирази для спостережних величин повинні мати добре визначену межу при  $d \rightarrow 4$ .

Проведемо пробне обчислення, щоб побачити, як працює ця техніка. Розглянемо простір-час з однією часовою і  $(d - 1)$  просторовими координатами. Як і досі, ми можемо вдатися до вікового повороту, щоб отримати фейнманові інтеграли в  $d$ -вимірному евклідовому просторі. Типовим прикладом є

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}. \quad (7.80)$$

Перший множник у (7.80) містить площу одиничної сфери у  $d$  вимірах. Для обчислення скористаємося таким прийомом:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp \left( - \sum_{i=1}^d dx_i^2 \right) = \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \\ &= \left( \int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)} = \\ &= \left( \int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right). \end{aligned}$$

<sup>47</sup>G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* B44, 189 (1972).

Отже, площа одиничної  $d$ -вимірної сфери є

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \quad (7.81)$$

Для добре знайомих окремих випадків ця формула дає:

$d$	$\Gamma(\frac{d}{2})$	$\int d\Omega_d$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	$2\pi$
3	$\sqrt{\pi}/2$	$4\pi$
4	1	$2\pi^2$

Другий множник у (7.80) є

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\ell \frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell^2) \frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}, \end{aligned}$$

де в другому рядку ми зробили підстановку  $x = \Delta/(\ell^2 + \Delta)$ . Скориставшись визначенням бета-функції

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (7.82)$$

можемо легко обчислити інтеграл по  $x$ . Остаточний результат для  $d$ -вимірного інтеграла:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}.$$

Оскільки  $\Gamma(z)$  має ізольовані полюси при  $z = 0, -1, -2, \dots$ , інтеграл також має полюси в точках  $d = 4, 6, 8, \dots$ . Щоб дослідити його поведінку поблизу  $d = 4$ , введемо  $\varepsilon = 4 - d$  і наближено запишемо<sup>48</sup>

$$\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (7.83)$$

<sup>48</sup>Це наближення безпосередньо випливає з представлення ґамма-функції, як ряду:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

де  $\gamma \approx 0,5772$  є константою Ейлера–Маскероні (ця константа в усіх спостережних величинах завжди скорочується). Таким чином, інтеграл стає

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (7.84)$$

Коли ми визначили цей інтеграл через регулятори Паулі–Віллара в рівнянні (7.18), то знайшли

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{x\Lambda^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\Delta^{-1}) \right).$$

Отже, полюс  $1/\varepsilon$  у методі розмірної регуляризації відповідає логарифмічній розбіжності в інтегралі по імпульсах. Відзначимо курйозний факт: до (7.84) входить логарифм  $\Delta$ , аргумент якого є розмірною величиною. Скорочення розмірності логарифма криється в члені  $1/\varepsilon$  і стає явним при скороченні розбіжностей.

Так само легко можна перевірити загальніші формули:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2}}. \quad (7.85)$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \quad (7.86)$$

У  $d$  вимірах  $g^{\mu\nu}$  задовольняє умові  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d$ . Отже, якщо чисельник підінтегрального виразу містить  $\ell^\mu \ell^\nu$ , ми мусимо замінити

$$\ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \quad (7.87)$$

за аналогією з (4.126). У багатомірній КЕД діраковими матрицями можна вважати набір  $d$  матриць, для яких виконуються співвідношення:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[1] = 4. \quad (7.88)$$

При маніпуляціях з виразом (7.78) ці правила дають такий самий результат, що й у випадку з чотирма вимірами. Проте обчислення інших діаграм дає додаткові внески порядку  $\varepsilon$ . Зокрема, тотожності (5.9) у  $d = 4 - \varepsilon$  вимірах змінюються на

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(2 - \varepsilon) \gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma. \end{aligned} \quad (7.89)$$



Додаткові члени можуть дати внесок в остаточне значення фейнманової діаграми, якщо вони мають множник  $\varepsilon^{-1}$ , що виникає з розбіжного інтеграла. В однопетльовому наближенні КЕД такі члени з'являються при обчисленні вершинних поправок або діаграм з власною енергією електрона, але при обчисленні спостережних величин вони взаємно скорочуються.

### Подальше обчислення $\Pi_2$

А тепер застосуємо формули розмірної регуляризації до інтеграла по імпульсах (7.79). Неприємні члени з  $\ell^2$  у чисельниках дають

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\left(-\frac{2}{d} + 1\right) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{-1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} g^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \cdot (-\Delta g^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Ми мали б очікувати на полюс при  $d = 2$ , бо квадратична розбіжність у чотирьох вимірах стає логарифмічною у двох. Проте полюс скорочується. Тотожність Варда працює.

Обчисливши решту членів у (7.79) і скориставшись  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ , отримаємо

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \times \\ &\times [g^{\mu\nu}(-m^2 + x(1-x)q^2) + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu] = \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i\Pi_2(q^2), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Pi_2(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow 4} -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi)\right) \\ &(\varepsilon = 4 - d). \end{aligned} \tag{7.90}$$

Шляхом розмірної регуляризації  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  справді набуває вигляду, який узгоджується з тотожністю Варда. А проте, він і далі логарифмічно розбігається.

Тепер можемо обчислити поправку порядку  $\alpha$  до електричного заряду:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \delta Z_3 \underset{O(\alpha)}{=} \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}.$$

Голий заряд нескінченно більший від фізичного, але ця різниця не є спостережною. У дослідах можна спостерігати лише залежність (7.77) ефективного електричного заряду від  $q^2$ . Вона визначається різницею

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_2(q^2) &\equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right),\end{aligned}\quad (7.91)$$

яка в межі  $\varepsilon \rightarrow 0$  не залежить від  $\varepsilon$ . В останньому пункті поточного параграфу дослідимо фізику, що міститься в цьому виразі.

### Інтерпретація $\Pi_2$

Передовсім розглянемо аналітичну структуру  $\hat{\Pi}_2(q^2)$ . При  $q^2 < 0$  (наприклад, коли фотонний пропагатор присутній у  $t$ - або  $u$ -каналах)  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  є явно дійсною й аналітичною. Але для процесу в  $s$ -каналі  $q^2$  буде позитивним. Логарифмічна функція має розріз при від'ємному аргументі, тобто коли

$$m^2 - x(1-x)q^2 < 0.$$

Добуток  $(1-x)$  дорівнює щонайбільше  $1/4$ , тому розріз  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  починається при

$$q^2 = 4m^2,$$

на порозі народження реальної електрон-позитронної пари. Обчислимо уявну складову  $\hat{\Pi}_2$  при  $q^2 > 4m^2$ . Для будь-якого фіксованого  $q^2$  значення  $x$ , що дають внески, лежать між  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta$ , де  $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$ . А оскільки  $\text{Im} [\log(-X \pm i\varepsilon)] = \pm\pi$ , то ми маємо

$$\begin{aligned}\text{Im} [\hat{\Pi}_2(q^2 \pm i\varepsilon)] &= -\frac{2\alpha}{\pi} (\pm\pi) \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta} dx x(1-x) = \\ &= \mp 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}\beta} dy \left(\frac{1}{4} - y^2\right) = \quad \left(y \equiv x - \frac{1}{2}\right) \quad (7.92) \\ &= \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right).\end{aligned}$$

Залежність від  $q^2$  достоту така сама, як і у виразі для утворення ферміон-антиферміонної пари (5.13). Це ми й мали очікувати, виходячи зі співвідношення унітарності, показаного на Рис. 7.6(b); розрізана навпіл діаграма

для розсіяння Бабá вперед дає повний переріз процесу  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ . Параметр  $\beta$  точно збігається зі швидкістю ферміонів у системі ЦМ.

Далі з'ясуємо, як величина  $\hat{\Pi}_2(q^2)$  модифікує електромагнітну взаємодію за виразом (7.77). У нерелятивістському наближенні є сенс обчислити ефективний потенціал  $V(r)$ . Для взаємодії між різними зарядами, за аналогією з (4.126), маємо

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2 [ -\hat{\Pi}_2(-|\mathbf{q}|^2) ]}. \quad (7.93)$$

Розклавши  $\hat{\Pi}_2$  при  $|q^2| \ll m^2$ , одержимо

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (7.94)$$

Поправка свідчить, що електромагнітна сила значно зростає на малих відстанях. Цей ефект можна виміряти в атомі водню, де енергетичні рівні зсуваються на величину

$$\Delta E = \int d^3\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x})|^2 \cdot \left( -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2.$$

Хвильова функція  $\psi(\mathbf{x})$  на початку координат відмінна від нуля лише для  $s$ -хвильових станів. Для  $2S$  стану цей зсув є

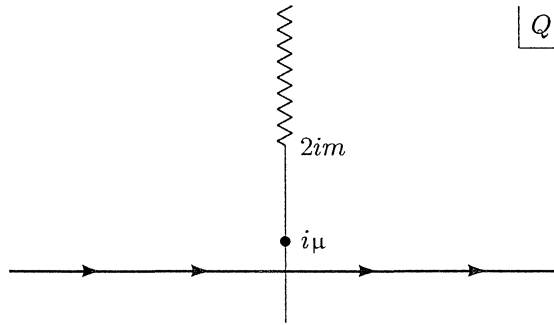
$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \cdot \frac{\alpha^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1,123 \times 10^{-7} \text{ еВ}.$$

Це є одна зі складових (незначна) лембового зсуву (див. Таблицю 6.1).

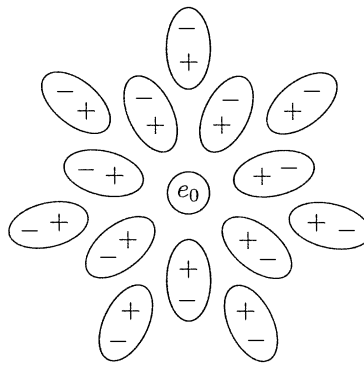
Дельта-функція в (7.94) є лише наближенням; для знаходження точної поправки, перепишемо вираз (7.93), як

$$V(\mathbf{x}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2)] \quad (Q \equiv |\mathbf{q}|),$$

де для регуляризації кулонового потенціалу ми вставили масу фотона  $\mu$ . Закнемо контур інтегрування згори (Рис. 7.7). Основний внесок дає полюс при  $Q = i\mu$ , що призводить до кулонового потенціалу  $-\alpha/r$ . Також є додатковий внесок від розрізу, що починається при  $Q = 2mi$ . Дійсна складова підінтегрального виразу по обидві сторони розрізу є однаковою, тож він дає внесок лише в уявну складову  $\hat{\Pi}_2$ . Визначивши  $q = -iQ$ , знаходимо, що



**Рис. 7.7.** Контур для обчислення ефективної сили електромагнітної взаємодії в нерелятивістському наближенні. Полюс при  $Q = i\mu$  відповідає кулоновому потенціалу, а розріз — поправці порядку  $\alpha$ , викликаний поляризацією вакууму.



**Рис. 7.8.** Віртуальні  $e^+e^-$ -пари ефективно є диполями завдовжки  $\sim \frac{1}{m}$ , що екранують голий заряд електрона.

внесок від розрізу

$$\begin{aligned} \delta V(r) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \operatorname{Im} [\hat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon)] = \\ &= -\frac{\alpha}{r} \frac{2}{\pi} \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \end{aligned}$$

При  $r \gg 1/m$ , інтеграл визначається ділянкою, де  $q \approx 2m$ . Апроксимувавши

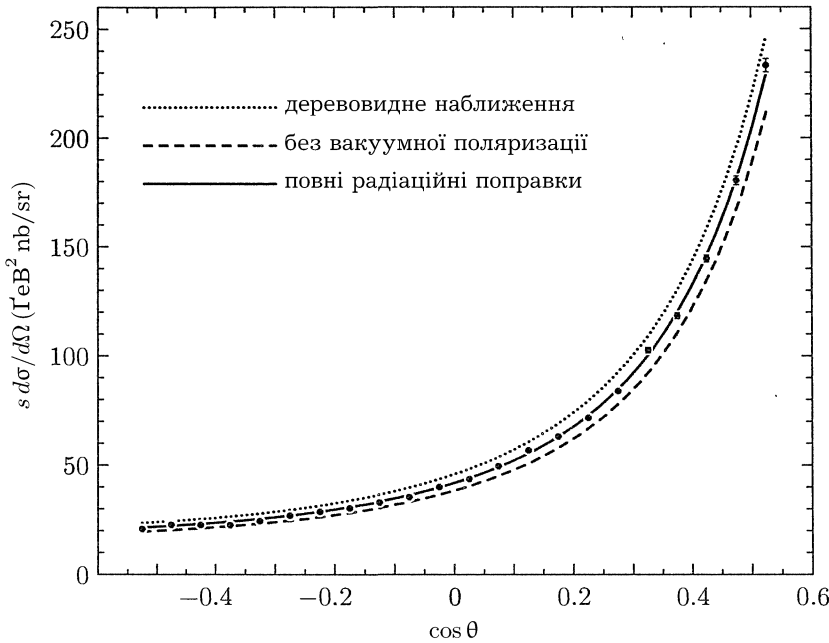
на ній підінтегральний вираз і зробивши підстановку  $t = q - 2m$ , маємо

$$\begin{aligned}\delta V(r) &= -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-(t+2m)r}}{2m} \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{m}} \left(\frac{3}{2}\right) + O(t) \approx \\ &\approx -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}},\end{aligned}$$

отже,

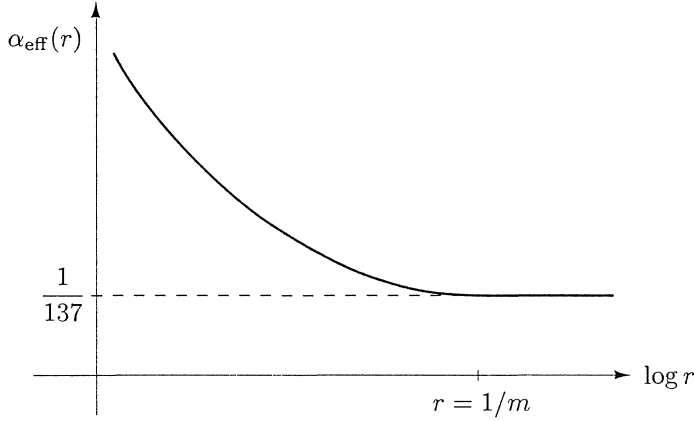
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right). \quad (7.95)$$

Таким чином, ділянка, де поправка є великою, визначається комптонової довжиною хвилі електрона  $1/m$ . Оскільки на цій ділянці хвильові функції атома водню можна вважати постійними, дельта-функція в (7.94) є гарним наближенням. Радіаційна поправка до закону Кулона  $V(r)$  має назву *потенціалу Юлінга*.



**Рис. 7.9.** Диференційний переріз розсіяння Бабі  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  при  $E_{\text{цм}} = 29 \text{ Гев}$ , одержаний колаборацією HRS, M. Derrick, et. al., *Phys. Rev. D* 34, 3286 (1986). Верхня крива відповідає врахуванню поправки порядку  $\alpha^2$ , про яку йшлося в Задачі 5.2 і малої поправки (2%), пов'язаною зі слабкою взаємодією. Нижня крива враховує всі радіаційні поправки КЕД порядку  $\alpha^3$  за винятком поляризації вакууму. Відзначимо, що ці поправки залежать від умов експерименту (див. Розділ 6). Середня крива враховує поляризацію вакууму і решту внесків, що за наявної енергії збільшує значення  $\alpha^2$  майже на 10%.

Ми можемо інтерпретувати цю поправку, як наслідок екранування. При  $r \gtrsim \frac{1}{m}$  віртуальні  $e^+e^-$ -пари перетворюють вакуум на діелектричне середовище, у якому видимий заряд є меншим, ніж справжній (Рис. 7.8). На менших відстанях ми починаємо проникати крізь поляризаційну хмару і відчуваємо вже голий заряд. Це явище відоме як *поляризація вакууму*.



**Рис. 7.10.** Якісна поведінка ефективної константи електромагнітного зв'язку з урахуванням однопетльової вакуумної поляризації, як функція відстані. Горизонтальна шкала перекриває багато порядків величини.

Тепер розглянемо протилежну межу — коли відстані дуже малі або  $-q^2 \gg m^2$ . Рівняння (7.91) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_2(q^2) &\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \log(x(1-x)) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right] = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ефективна константа взаємодії в цьому наближенні є

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log\left(\frac{-q^2}{Am^2}\right)}, \quad (7.96)$$

де  $A = \exp(5/3)$ . Отже, на малих відстанях ефективний електричний заряд стає значно більшим, коли ми проникаємо крізь екрануючу хмару віртуальних електрон-позитронних пар.

Комбінований ефект поляризації вакууму електронами і більш важкими лептонами та кварками призводять до збільшення  $\alpha_{\text{eff}}(q^2)$  приблизно

на 5% у діапазоні від  $q = 0$  до  $q = 30$  Гев, і це спостерігається в експериментах при високих енергіях. На Рис. 7.9 показано переріз розсіяння Бабі при  $E_{\text{цм}} = 29$  Гев і проведено порівняння з теоретичними результатами КЕД як з урахуванням діаграми поляризації вакууму, так і без неї.

Ми можемо записати  $\alpha_{\text{eff}}$ , як функцію відстані  $r$ , припустивши, що  $q = \frac{1}{r}$ . Поведінка  $\alpha_{\text{eff}}(r)$  для всіх  $r$  показана на Рис. 7.10. Ідея залежності від відстані („масштабно-залежної“ або „біжучої“) константи зв'язку буде важливою темою розгляду в наступних двох томах цієї книги.

## Задачі

**7.1.** У § 7.3 ми вдалися до непрямого методу при аналізі однопетльової  $s$ -канальної діаграми для бозон-бозонного розсіяння в теорії  $\phi^4$ . Перевірте цей метод, використавши фейнманові параметри, і обчисліть внески всіх трьох однопетльових діаграм. Переконайтеся, що для цього випадку виконується оптична теорема.

**7.2. Альтернативні способи регуляризації в КЕД.** У § 7.5 ми бачили, як порушується тотожність Варда через невдало обраний спосіб регуляризації. Перевірте справедливості рівності  $Z_1 = Z_2$  у першому порядку за  $\alpha$  для вказаних далі регуляризацій. Ми вже переконалися, що це співвідношення зберігається для методу Паулі – Вілларса.

- (а) Обчисліть знову  $\delta Z_1$  і  $\delta Z_2$ , встановивши в інтегралах (6.49) та (6.50) верхню межу  $\Lambda$  при інтегруванні по  $\ell_E$ . Покажіть, що тоді  $\delta Z_1 \neq \delta Z_2$ .
- (б) Обчисліть ще раз  $\delta Z_1$  і  $\delta Z_2$ , визначивши інтеграли (6.49) та (6.50) шляхом розмірної регуляризації. Можете скористатися звичайними діраковими  $4 \times 4$  матрицями, але врахуйте, що в  $d$  вимірах

$$g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = d$$

Покажіть, що в цьому разі  $\delta Z_1 = \delta Z_2$ .

**7.3.** Розгляньте теорії елементарних ферміонів, що перебувають у взаємодії з калібровочним полем КЕД і юкавським полем  $\phi$ :

$$H_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \phi \bar{\psi} \psi + \int d^3\mathbf{x} e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

- (a) Переконайтеся, що внесок у  $Z_1$  від вершинної діаграми з віртуальним  $\phi$  дорівнює внескові в  $Z_2$  від діаграми з віртуальним  $\phi$ . Використайте розмірну регуляризацию. Чи виконується тотожність Варда в такій теорії?
- (b) Далі розгляньте перенормування вершини  $\phi\bar{\psi}\psi$ . Покажіть, що зміна масштабу цієї вершини при  $q^2 = 0$  не скорочується з поправкою до  $Z_2$ . (Для цього досить підрахувати ультрафіолетово розбіжну частину діаграми.) У цій теорії константи перенормування для вершини і напруженості поля дають додаткові зсуви спостережної константи зв'язку порівняно з її голим значенням.



# Прикінцевий проект

## Випромінювання глюонних струменів

Хоча в останніх двох розділах ми й розглядали різні радіаційні поправки, проте жодного разу не провели повного обчислення перерізу з цими поправками. Причина, звісно, полягає в тому, що такі розрахунки здебільшого дуже громіздкі. А проте, не можна претендувати на розуміння радіаційних поправок після обчислення лише окремих їхніх ефектів, які ми розглядали досі. Цей „прикінцевий проект“ покликаний виправити ситуацію. Він присвячений обчисленню перерізу з радіаційними поправками одного з найпростіших, але вкрай важливого процесу. Перед розглядом цього проекту ви маєте вивчити Розділ 6, але не зобов'язані знайомитися з матеріалом Розділу 7.

Сильно взаємодіючі частки — піони, каони та протони — утворюються в процесі  $e^+e^-$ -анігіляції, коли віртуальний фотон народжує пару кварків. Якщо ігнорувати ефекти сильної взаємодії, то зовсім неважко обчислити повний переріз такого процесу. У нашому прикінцевому проекті ми проаналізуємо перші поправки до перерізу, пов'язані з сильною взаємодією.

Певна річ, ми не вдаватимемося в тонкощі квантової хромодинаміки, а скористаємося простою емпіричною моделлю, запровадивши безмасову векторну частку, *глюон*, що взаємодіє з кварками таким чином:

$$\Delta H = \int d^3\mathbf{x} g \bar{\psi}_{fi} \gamma^\mu \psi_{fi} B_\mu.$$

Тут  $f$  позначає тип („аромат“) кварка ( $u, d, s, c$ , і т. д.), а індекс  $i = 1, 2, 3$  — його колір. Константа сильного зв'язку  $g$  не залежить від кольору та аромату, а от електромагнітна взаємодія між кварками перебуває в залежності від аромату, бо кварки  $u$  і  $c$  мають електричний заряд  $Q_f = +2/3$ , а кварки  $d$  і  $s$  — заряд  $Q_f = -1/3$ . За аналогією з  $\alpha$ , визначимо

$$\alpha_g = \frac{g}{4\pi}.$$

Нижче ми обчислимо пропорційні  $\alpha_g$  радіаційні поправки до народження кваркової пари.

Така модель сильної взаємодії не цілком узгоджується з загальноприйнятою наразі теорією — квантовою хромодинамікою. Проте всі ре-

зультати, що їх ми одержимо, справедливі й для КХД, якщо замінити

$$\alpha_g \rightarrow \frac{4}{3} \alpha_s.$$

Ми перевіримо це твердження в Розділі 17 (Том III).

Надалі ми можемо ігнорувати маси кварків. Також можемо знехтувати масами електрона та позитрона й робити усереднення за їхніми поляризаціями. Щоб контролювати інфрачервоні розбіжності, необхідно надати глюонові малу масу  $\mu$ , яку можна зробити нульовою лише наприкінці обчислень. Та оскільки в нашому розгляді усе ж фігуруватиме масивний бозон, суму за його станами поляризації (як ми вже обговорювали в Задачі 5.5) слід брати шляхом підстановки

$$\sum \epsilon^\mu \epsilon^{\nu*} \rightarrow -g^{\mu\nu},$$

з чого випливає, що ми можемо скористатися пропагатором

$$\overline{B_\mu} B_\nu = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}.$$

- (а)** Згадайте з § 5.1, що в нижчому порядку за  $\alpha$  і при нехтуванні впливом глюонів повний переріз народження кваркової пари аромату  $f$  є<sup>49</sup>

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q) \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2.$$

Обчисліть внесок у  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$  від діаграми з одним віртуальним глюоном. Приведіть цей вираз до інтеграла по фейнманових параметрах і перенормуйте його шляхом віднімання відповідного члена при  $q^2 = 0$ , дотримуючись процедури, аналогічної (6.55). Зверніть увагу, що остаточний вираз можна інтерпретувати, як поправку до кваркового форм-фактора  $F_1(q^2)$ . Доведіть, що для безмасових кварків у всіх порядках за  $\alpha_g$  повний переріз народження кваркової пари за відсутності глюона є

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3|F_1(q^2 = s)|^2$$

$$\text{з } F_1(q^2 = 0) = Q_f.$$

<sup>49</sup>Тут  $s$  позначає не кварковий аромат, а мандельштамову змінну. Втім, сплутати їх неможливо, оскільки аромат не є числовою величиною. (Прим. перекл.)

- (b) Перед обчисленням інтеграла з пункту (а) зробіть відступ і розгляньте процес  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}qg$  утворення кваркової пари з випромінюванням додаткового глюона  $g$ . Спершу з'ясуйте його кінематику. Нехай  $q$  є повним 4-імпульсом реакції,  $k_1$  і  $k_2$  — 4-імпульсами кінцевих кварка й антикварка, а  $k_3$  — 4-імпульсом глюона. Визначимо

$$x_i = \frac{2k_i \cdot q}{q^2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

це є відношенням енергії частки  $i$  в системі центру мас до максимально можливої енергії. Тепер покажіть, що: (i)  $\sum x_i = 2$ ; (ii) решта лоренцових скалярів, що містять лише імпульси кінцевого стану, можна виразити через  $x_i$  та маси часток; і (iii) повний інтеграл по тричастковому фазовому простору можна записати як

$$\int d\Pi_3 = \prod_i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - \sum_i k_i) = \frac{q^2}{128\pi^3} \int dx_1 dx_2.$$

Знайдіть межі інтегрування по  $x_1$  і  $x_2$ , якщо кварк та антикварк є безмасовими, а глюон має масу  $\mu$ .

- (c) Зобразіть фейнманові діаграми для процесу  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}qg$  у провідному порядку за  $\alpha$  та  $\alpha_g$  й обчисліть диференційний переріз. Ви можете позбутися інформації про кореляцію між кутом початкового пучка та напрямком імпульсів кінцевих часток наступним чином. Звичайний прийом зі слідами для обчислення квадрату матричного елемента дає в нашому випадку результат вигляду

$$\int d\Pi_3 \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = L_{\mu\nu} \int d\Pi_3 H^{\mu\nu},$$

де  $L_{\mu\nu}$  представляє електронний слід, а  $H^{\mu\nu}$  — кварковий. Якщо проінтегруєте по всіх параметрах кінцевого стану за винятком  $x_1$  та  $x_2$ , які є скалярами, то єдиним 4-вектором, що характеризуватиме кінцевий стан, залишиться  $q^\mu$ . З іншого боку,  $H_{\mu\nu}$  задовольняє

$$q^\mu H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} q^\nu = 0.$$

Чому це справедливо? (Існує аргументація, що ґрунтується на засадничих принципах, проте вам буде корисно перевірити цю рівність безпосередньо, шляхом прямих викладок.) Оскільки після інтегрування по векторах кінцевого стану  $\int H^{\mu\nu}$  залежить винятково від  $q^\mu$  та скалярів, він може мати лише такий вигляд

$$\int d\Pi_3 H^{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \cdot H,$$

де  $H$  є скаляр. З урахуванням цього, покажіть, що

$$L_{\mu\nu} \int dP_3 H^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}) \cdot \int dP_3 (g^{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}).$$

Скориставшись цим прийомом, отримайте вираз для диференційного перерізу

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2} (e^+ e^- \rightarrow \bar{q} q) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \frac{\alpha_g}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

у межі  $\mu \rightarrow 0$ . Коли припустити, що кожна частка в кінцевому стані фізично реалізується як струмінь сильно взаємодіючих часток, то ця формула дає ймовірність появи трьох таких струменів у процесі  $e^+ e^-$ -анігіляції. Форма розподілу в  $x_i$  є абсолютним передбаченням, і вона збігається з експериментальними даними, що дозволяє виміряти константу зв'язку для сильної взаємодії.

**(d)** Тепер зробіть заміну  $\mu \neq 0$  у формулі для диференційного перерізу з пункту (c) й уважно проінтегруйте її в межах, знайдених у пункті (b). Можете вважати, що  $\mu^2 \ll q^2$ . У цьому наближенні знайдіть інфрачервоно розбіжні члени порядків  $\log(q^2/\mu^2)$  і  $\log^2(q^2/\mu^2)$ , кінцеві члени порядку 1, а також члени, що в явному вигляді містять степені від  $(\mu^2/q^2)$ . Останні можете відкинути, бо вони обертаються на нуль при  $\mu \rightarrow 0$ . Наразі нас цікавлять лише члени з інфрачервоними розбіжностями.

**(e)** Проаналізуйте інтеграл з фейнмановими параметрами, одержаний в (a), знову працюючи в наближенні  $\mu^2 \ll q^2$ . Зауважте, що в межах інтегрування присутні сингулярності. Їх можна проконтролювати, обчислюючи інтеграл для простороподібного  $q$ , а потім аналітично продовживши на фізичні значення імпульсу. Для цього зробіть підстановку  $Q^2 = -q^2$  і обчисліть інтеграл для  $Q^2 > 0$ , відтак акуратно здійсніть аналітичне продовження на  $Q^2 = -q^2 - i\epsilon$ . Об'єднайте цей результат з результатом пункту (d), щоб отримати повний переріз для процесу

$$e^+ e^- \rightarrow (\text{сильно взаємодіючі частки})$$

в порядку  $\alpha_g$ . Покажіть, що всі інфрачервоні логарифми в цій величині скорочуються, тож у межі  $\mu \rightarrow 0$  вона добре визначена.

**(f)** І, нарешті, зберіть разом усі члени порядку 1 в інтегруваннях з пунктів (d) і (e). Для їх точного обчислення буде корисною формула

$$\int_0^1 dx \frac{\log(1-x)}{x} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(її неважко довести.) Покажіть, що повний переріз для цього порядку  $\alpha_g$  є

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q \text{ або } \bar{q}qg) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \left(1 + \frac{3\alpha_g}{4\pi}\right).$$

Ця формула дає другий спосіб вимірювання константи зв'язку для сильної взаємодії. Експериментальні результати (з урахуванням похибок) цілком узгоджуються з результатами, одержаними за методом пункту (с).

## Додаток

### Фізичні константи і перевідні множники

Точно відомі фізичні константи:

$$c = 2,998 \times 10^{10} \text{ см/с}$$

$$\hbar = 6,582 \times 10^{-22} \text{ МеВ} \cdot \text{с}$$

$$e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137,04} = 0,00730$$

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1,166 \times 10^{-5} \text{ ГеВ}^{-2}.$$

Маси часток (помножені на  $c^2$ ):

$$e : 0.5110 \text{ МеВ}$$

$$p : 938,3 \text{ МеВ}$$

$$W^\pm : 80,2 \text{ ГеВ}$$

$$\mu : 105.6 \text{ МеВ}$$

$$n : 939,6 \text{ МеВ}$$

$$Z^0 : 91,19 \text{ ГеВ}$$

$$\tau : 1777 \text{ МеВ}$$

$$\pi^\pm : 139,6 \text{ МеВ}$$

$$\pi^0 : 135,0 \text{ МеВ}$$

Корисні комбінації:

$$\text{Радіус Бора: } a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5,292 \times 10^{-9} \text{ см}$$

$$\text{Комптонова довжина хвилі електрона: } \lambda = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,862 \times 10^{-11} \text{ см}$$

$$\text{Класичний радіус електрона: } r_e = \frac{\alpha \hbar}{m_e c} = 2,818 \times 10^{-13} \text{ см}$$

$$\text{Томпсонів переріз розсіяння: } \sigma_T = \frac{8\pi e^2}{3} = 0,6652 \text{ барн}$$

$$\text{Переріз розсіяння при анігіляції: } 1R = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{цм}}^2} = \frac{86,8 \text{ нбарн}}{(E_{\text{цм}} \text{ у ГеВ})^2}$$

Перевідні множники:

$$(1 \text{ ГеВ})/c^2 = 1,783 \times 10^{-24} \text{ г}$$

$$(1 \text{ ГеВ})^{-1}(\hbar c) = 0,1973 \times 10^{-13} \text{ см} = 0,1973 \text{ фм}$$

$$(1 \text{ Гев})^{-2}(\hbar c)^2 = 0,3894 \times 10^{-27} \text{ см}^2 = 0,3894 \text{ мбарн}$$

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$$

$$(1 \text{ в/м})(e\hbar c) = 1,973 \times 10^{-25} \text{ Гев}^2$$

$$(1 \text{ тл})(e\hbar c^2) = 5,916 \times 10^{-17} \text{ Гев}^2$$

# Бібліографія

- [1] Abrikosov, A. A., Gorkov, L. P., and Dzyaloshinskii, I. E., *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics* (second edition), Pergamon, Oxford, 1965. Класичний посібник з застосування фейнманових діаграм у теорії конденсованих станів.
- [2] Aitchison, Ian J. R. and Hey, Anthony J. G., *Gauge Theories in Particle Physics* (second edition), Adam Hilger, Bristol, 1989. Елементарний вступ у калібровочні теорії, зосереджений здебільшого на трирівневих процесах.
- [3] Anderson, P. W., *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Неформальний огляд концепції порушення симетрії і перенормувань у застосуванні до конденсованих станів.
- [4] Bailin, D. and Love, A., *Introduction to Gauge Field Theory* (revised edition), Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993. Теорія розвинена цілком на засадах функціонального інтегрування.
- [5] Balian, Roger and Zinn-Justin, Jean (eds.), *Methods in Field Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1976. Лекції з функціональних методів, перенормувань і калібровочних теорій, прочитані в літній школі теоретичної фізики, Ош, 1975 рік.
- [6] Barger, Vernon and Phillips, Roger J. N., *Collider Physics*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1987. Розгляд застосувань КХД до феноменології колайдерів високих енергій.
- [7] Baym, Gordon, *Lectures on Quantum Mechanics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1969. Конспективний, неформальний текст, насичений нетривіальними прикладами.
- [8] Berestetskii, V. B., Lifshitz, E. M., and Pitaevskii, L. P., *Quantum Electrodynamics* (second edition, trans. J. B. Sykes and J. S. Bell), Pergamon, Oxford, 1982. Чудовий виклад застосувань КЕД.
- [9] Bjorken, James D. and Drell, Sidney D., *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964. Вивчення фейнманових діаграм на підставі інтуїтивних аргументів, без запровадження полів.



- [10] Bjorken, James D. and Drell, Sidney D., *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965. Запровадження фейнманових діаграм з польової точки зору, з застосуванням канонічного квантування.
- [11] Brown, Lowell S., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, New York, 1992. Ґрунтовний розгляд засад квантової теорії поля і її застосування до процесів розсіяння.
- [12] Cahn, Robert N., *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*, Benjamin/Cummings Menlo Park, California, 1984. Написано фізиком для фізиків.
- [13] Calm, Robert N. and Goldhaber, Gerson, *The Experimental Foundations of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Передрук низки оригінальних статей, доповнених вступними оглядами, додатковими посиланнями та вправами. Дуже рекомендовано.
- [14] Carrier, George F., Krook, Max, and Pearson, Carl E., *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, New York, 1966. Чудовий практичний підручник з методів комплексних змінних і контурного інтегрування.
- [15] Cheng, Ta-Pei and Li, Ling-Fong, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, New York, 1984. Просунута, авторитетна монографія.
- [16] Coleman, Sidney, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. Неформальні лекції з калібровочних полів і симетрії, прочитані між 1966 і 1979 рр.
- [17] Collins, John, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. Ґрунтовний виклад технічного апарату, необхідного для доведення перенормованості в усіх порядках, розширення операторного добутку і теорем факторизації.
- [18] Commins, Eugene D. and Bucksbaum, Philip H., *Weak Interactions of Leptons and Quarks*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Вичерпний огляд теорії й експерименту.
- [19] Deser, Stanley, Grisaru, Marc, and Pendleton, Hugh, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, MIT Press, Cambridge, 1970, vol. 1. Чотири корисні лекції, прочитані в літній школі.
- [20] Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, 1971. Посібник з застосування фейнманових діаграм у фізиці ядра і конденсованих станів.

- [21] Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, McGraw-Hill, New York, 1980. Включає кілька розділів з механіки суцільних середовищ і корисні математичні додатки.
- [22] Feynman, Richard P. and Hibbs, A. R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965. Посібник з застосування функціональних інтегралів у нерелятивістській квантовій механіці.
- [23] Feynman, Richard P., *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1985. Запис чотирьох лекцій для широкої аудиторії, у яких представлений фейнманів підхід до квантової механіки, включно з фейнмановими діаграмами. Дуже рекомендовано.
- [24] Field, Richard D., *Applications of Perturbative QCD*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1989. Корисний опис методів, необхідних для обчислень у КХД поза головним порядком.
- [25] Georgi, Howard, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Просунутий, проникливий огляд обраних розділів.
- [26] Goldstein, Herbert, *Classical Mechanics* (second edition), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980. У Розділі 12 викладено класичну релятивістську теорію поля.
- [27] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products* (trans, and ed. by Alan Jeffrey), Academic Press, Orlando, Florida, 1980.
- [28] Griffiths, David, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, New York, 1987. Чудовий огляд аспірантського рівня.
- [29] Gross, Franz, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, 1993. Включає низку розділів з „передової квантової механіки“ і вступ до зв'язаних станів.
- [30] Halzen, Francis and Martin, Alan D., *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, New York, 1984. Цілком ґрунтується на методі фейнманових діаграм; виклад зосереджено на калібровочних теоріях.
- [31] Itzykson, Claude and Zuber, Jean-Bernard, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980. Дуже ґрунтовний підручник.

- [32] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (second edition), Wiley, New York, 1975. Класичний підручник з класичної електродинаміки.
- [33] Jauch, J. M. and Rohrlich, F., *The Theory of Photons and Electrons* (second edition), Springer-Verlag, Berlin, 1976. Авторитетна монографія з КЕД.
- [34] Kaku, Michio, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, 1993. Містить короткі вступні розділи до кількох важливих тем.
- [35] Kinoshita, T., ed., *Quantum Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, 1990. Збірка статей, присвячених точним перевіркам КЕД.
- [36] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Statistical Physics* (third edition, Part 1, trans. J. B. Sykes and M. J. Kearsley), Pergamon Press, 1980. Гарний підручник зі статистичної механіки, містить оригінальний педагогічний виклад теорії фазових переходів Ландау.
- [37] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields* (fourth revised English edition, trans. Morton Hamermesh), Pergamon, Oxford, 1975. Містить стислий виклад електромагнітної теорії з лагранжової точки зору.
- [38] Ma, Shang-Keng, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin/Cummings, 1976. Огляд методів групи перенормувань у теорії критичних явищ.
- [39] Mandl, F. and Shaw, G., *Quantum Field Theory* (revised edition), Wiley, New York, 1993. Найпростіша книга з теорії поля; розглянуті КЕД і електро-слабка теорія на основі канонічного квантування.
- [40] Mattuck, Richard D., *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, McGraw-Hill, New York, 1967. Ясний і простий посібник з фейнманових діаграм у фізиці твердого тіла.
- [41] Parisi, Giorgio, *Statistical Field Theory*, Benjamin/Cummings, 1988. Розвинене застосування ідей квантової теорії поля до проблем статистичної механіки.
- [42] Perkins, Donald H., *Introduction to High Energy Physics* (third edition), Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1987. Чудовий огляд явищ з порівняно невеликим наголосом на фейнманові діаграми і калібровочні теорії.

- [43] Quigg, Chris, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1983. Дуже гарний огляд калібровочних теорій та їх експериментальних перевірок.
- [44] Ramond, Pierre, *Field Theory: A Modern Primer* (second edition), Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989. Містить чудовий виклад групи Лоренца, функціональних інтегралів, теорії  $\phi^4$  і квантування калібровочних полів.
- [45] Reichl, L. E., *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin, 1980. Ґрунтовний підручник зі статистичної механіки.
- [46] Ross, Graham G., *Grand Unified Theories*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Ясний вступ у калібровочні теорії, що об'єднують взаємодії у фізиці часток.
- [47] Ryder, Lewis H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. Коротко розглянуто формальні аспекти теорії.
- [48] Sakurai, J. J., *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1967. Виклад фейнманових діаграм без запровадження поняття поля.
- [49] Schiff, Leonard I., *Quantum Mechanics* (third edition), McGraw-Hill, New York, 1968.
- [50] Schweber, Silvan S., *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, Princeton University Press, Princeton, 1994. Чудовий виклад історії КЕД приблизно до 1950 р.
- [51] Schwinger, Julian (ed.), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover, New York, 1958. Передрук важливих статей, написаних між 1927 і 1953 рр.
- [52] Shankar, Ramamurti, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum, New York, 1980. Дуже ясний виклад засад теорії.
- [53] Stanley, H. Eugene, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford, 1971.
- [54] Stermann, George, *Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Вступний підручник з особливим наголосом на основах пертурбативної КХД.
- [55] Taylor, Edwin F. and Wheeler, John Archibald, *Spacetime Physics* (second edition), Freeman, New York, 1992. Елементарний, але вельми корисний вступ до спеціальної теорії відносності.

- [56] Taylor, John R., *Scattering Theory*, Robert E. Krieger, Malabar, Florida, 1983 (reprint of original edition published by Wiley, New York, 1972). Ясний виклад теорії розсіяння в нерелятивістській квантовій механіці.
- [57] Taylor, J. C., *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Стислий виклад стандартної моделі.
- [58] Zinn-Justin, Jean, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (third edition), Oxford University Press, Oxford, 1996. Застосування теорії перенормувань до вивчення критичних явищ.

### **Додано при перекладі:**

- [59] Ballentine, L. E., *Quantum Mechanics. A Modern Development*, World Scientific Publishing, Singapour, 1998.
- [60] Eden, R. J., Landshoff, P. V., Olive, D. I., Polkinghorne, J. C., *The Analytic S-Matrix*, Cambridge University Press, 1966.
- [61] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Volume I, Foundations*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [62] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Volume II, Modern Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [63] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields. Volume III, Supersymmetry*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [64] Streater, R. F. and Wightman, A. S., *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1964.
- [65] Вакарчук, І. О., *Квантова механіка*, Львівський університет, Львів, 1998.
- [66] Дирак, П. А. М., *Принципы квантовой механики*, Мир, Москва, 1979.
- [67] Мессиа, А., *Квантовая механика. Том 1*, Наука, Москва, 1978.
- [68] Мессиа, А., *Квантовая механика. Том 2*, Наука, Москва, 1979.
- [69] Садовский, М. В., *Лекции по квантовой теории поля*, Институт компьютерных исследований, Москва — Ижевск, 2003.